

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

В книге элементарно и на современном уровне описываются методы малого параметра в применении к широкому кругу задач механики и математической физики. Наряду с классическими методами в ней рассматриваются и оригинальные, разработанные автором. Многочисленные примеры и задачи, имеющие также и самостоятельный интерес, делают изложение ясным и понятным. Большое количество примеров дается в заключение глав в качестве упражнений.

Книга представляет интерес для специалистов, работающих в области прикладной математики и механики, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в указанных областях.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	9
1.1. Возмущения по параметру	10
1.1.1. Алгебраическое уравнение	10
1.1.2. Осциллятор Ван-дер-Поля	11
1.2. Возмущения по координате	13
1.2.1. Уравнение Бесселя нулевого порядка	13
1.2.2. Простой пример	15
1.3. Символы порядка и калибровочные функции	15
1.4. Асимптотические разложения и последовательности	18
1.4.1. Асимптотические ряды	18
1.4.2. Асимптотические разложения	21
1.4.3. Единственность асимптотических разложений	23
1.5. Сравнение сходящегося и асимптотического рядов	24
1.6. Неравномерные разложения	25
1.7. Простейшие действия над асимптотическими разложениями	28
Упражнения	29
Глава 2. Прямые разложения и источники неравномерности	33
2.1. Бесконечные области	34
2.1.1. Уравнение Дюффинга	34
2.1.2. Модель слабой нелинейной неустойчивости	35
2.1.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла	36
2.1.4. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса	39
2.2. Малый параметр при старшей производной	41
2.2.1. Пример второго порядка	41
2.2.2. Обтекание тела при больших числах Рейнольдса	43
2.2.3. Релаксационные колебания	45
2.2.4. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин	46
2.3. Изменение типа дифференциального уравнения в частных производных	48

2.3.1. Простой пример	48
2.3.2. Длинные волны на поверхности жидкости, стекающей по наклонной плоскости	49
2.4. Наличие особенностей	53
2.4.1. Сдвиг особенности	53
2.4.2. Задача о космическом корабле Земля — Луна	54
2.4.3. Термоупругие поверхностные волны	56
2.4.4. Задача с точкой возврата	59
2.5. Роль координатных систем	60
Упражнения	63
Глава 3. Метод растянутых координат	67
3.1. Метод растянутых параметров	69
3.1.1. Метод Линдштедта — Пуанкаре	69
3.1.2. Переходные кривые для уравнения Матьё	71
3.1.3. Характеристические показатели для уравнения Матьё (метод Уиттекера)	74
3.1.4. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел	76
3.1.5. Характеристические показатели для треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел	79
3.1.6. Простая линейная задача на собственные значения	81
3.1.7. Квазилинейная задача на собственные значения	84
3.1.8. Квазилинейное уравнение Клейна — Гордона	89
3.2. Метод Лайтхилла	90
3.2.1. Дифференциальное уравнение первого порядка	92
3.2.2. Одномерная задача о космическом корабле Земля — Луна	96
3.2.3. Твердый цилиндр, равномерно расширяющийся в неподвижном воздухе	97
3.2.4. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла	100
3.2.5. Разложения с использованием точных характеристик: нелинейные упругие волны	103
3.3. Метод Темпла	108
3.4. Метод перенормировки	109
3.4.1. Уравнение Дюффинга	ПО
3.4.2. Модель слабо нелинейной неустойчивости	110
3.4.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла	111
3.4.4. Сдвиг особенности	112
3.5. Ограничения метода растянутых координат	ИЗ
3.5.1. Пример слабо нелинейной неустойчивости	114
3.5.2. Малый параметр при высшей производной	115
3.5.3. Задача о космическом корабле Земля — Луна	117
Упражнения	118
Глава 4. Метод сращивания асимптотических разложений и составные разложения	124

4.1. Метод сращивания асимптотических разложений	125
4.1.1. Введение: метод Прандтля	125
4.1.2. Высшие приближения и усовершенствованные процедуры сращивания	128
4.1.3. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами	136
4.1.4. Уравнение Рейнольдса для скользящей опоры	140
4.1.5. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин	142
4.1.6. Термоупругие поверхностные волны	148
4.1.7. Задача о космическом корабле Земля — Луна	151
4.1.8. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса	154
4.2. Метод составных разложений	159
4.2.1. Уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	160
4.2.2. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами	163
4.2.3. Краевая задача с начальными условиями для уравнения теплопроводности	166
4.2.4. Ограничения метода составных разложений	168
Упражнения	170
Глава 5. Вариация произвольных постоянных и метод усреднения	174
5.1. Вариация произвольных постоянных	175
5.1.1. Решения уравнения Шредингера, зависящие от времени	175
5.1.2. Пример нелинейной устойчивости	177
5.2. Метод усреднения	180
5.2.1. Методика Ван-дер-Поля	180
5.2.2. Методика Крылова — Боголюбова	181
5.2.3. Обобщенный метод усреднения	183
5.3. Методика Страбла	187
5.4. Методика Крылова — Боголюбова — Митропольского	189
5.4.1. Уравнение Дюффинга	190
5.4.2. Осциллятор Ван-дер-Поля	192
5.4.3. Уравнение Клейна — Гордона	193
5.5. Метод усреднения с использованием канонических переменных	195
5.5.1. Уравнение Дюффинга	198
5.5.2. Уравнение Матьё	199
5.5.3. Качающаяся пружина	201
5.6. Методика фон Цайпеля	205
5.6.1. Уравнение Дюффинга	208
5.6.2. Уравнение Матьё	210
5.7. Усреднение с использованием рядов и преобразований Ли	216
5.7.1. Ряды и преобразования Ли	217
5.7.2. Обобщенные алгоритмы	218
5.7.3. Упрощенные общие алгоритмы	223
5.7.4. Схема процедуры	225
5.7.5. Алгоритмы для канонических систем	229

5.8. Усреднение с использованием лагранжианов	233
5.8.1. Модель диспергирующих волн	234
5.8.2. Модель взаимодействия волна — волна	237
5.8.3. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона	239
Упражнения	240
Глава 6. Метод многих масштабов	245
6.1. Описание метода	245
6.1.1. Метод многих переменных (процедура разложения производной)	254
6.1.2. Процедура разложения по двум переменным	258
6.1.3. Обобщенный метод — нелинейные масштабы	259
6.2. Приложения метода разложения производной	262
6.2.1. Уравнение Дюффинга	262
6.2.2. Осциллятор Ван-дер-Поля	264
6.2.3. Вынужденные колебания осциллятора Ван-дер-Поля	267
6.2.4. Параметрический резонанс — уравнение Матьё	272
6.2.5. Осциллятор Ван-дер-Поля с запаздывающей амплитудой	276
6.2.6. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел	279
6.2.7. Качающаяся пружина	281
6.2.8. Модель для слабой нелинейной неустойчивости	284
6.2.9. Модель взаимодействия волна — волна	286
6.2.10. Ограничения метода разложения производной	288
6.3. Процедура разложения по двум переменным	290
6.3.1. Уравнение Дюффинга	290
6.3.2. Осциллятор Ван-дер-Поля	292
6.3.3. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел	295
6.3.4. Ограничения рассматриваемой методики	296
6.4. Обобщенный метод	296
6.4.1. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами	296
6.4.2. Общее уравнение второго порядка с переменными коэффициентами	301
6.4.3. Линейный осциллятор с медленно меняющейся восстанавливающей силой	303
6.4.4. Пример с точкой возврата	305
6.4.5. Уравнение Дюффинга с медленно меняющимися коэффициентами	308
6.4.6. Динамика входа	312
6.4.7. Задача о космическом корабле типа Земля — Луна	316
6.4.8. Модель диспергирующих волн	319
6.4.9. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона	322
6.4.10. Преимущества и ограничения обобщенного метода	324
Упражнения	325

Глава 7. Асимптотические решения линейных уравнений	329
7.1. Дифференциальные уравнения второго порядка	330
7.1.1. Разложения в окрестности нерегулярной особенности	330
7.1.2. Разложение функции Бесселя нулевого порядка для больших значений аргумента	334
7.1.3. Задача Лиувилля	336
7.1.4. Высшие приближения для уравнений, содержащих большой параметр	337
7.1.5. Малый параметр при старшей производной	339
7.1.6. Однородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами	340
7.1.7. Динамика входа снаряда	342
7.1.8. Неоднородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами	343
7.1.9. Последовательные приближения Лиувилля — Грина (ВКБ-приближения)	346
7.2. Системы обыкновенных уравнений первого порядка	348
7.2.1. Разложения в окрестности иррегулярной особой точки	348
7.2.2. Асимптотическое разбиение систем уравнений	349
7.2.3. Субнормальные решения	353
7.2.4. Системы, содержащие параметр	355
7.2.5. Однородные системы с медленно меняющимися коэффициентами	356
7.3. Задачи с точкой возврата	358
7.3.1. Метод сращивания асимптотических разложений	359
7.3.2. Преобразование Лангера	363
7.3.3. Задачи с двумя точками возврата	366
7.3.4. Задачи с точками возврата высших порядков	369
7.3.5. Высшие приближения	370
7.3.6. Неоднородная задача с простой точкой возврата — первое приближение	376
7.3.7. Неоднородная задача с простой точкой возврата — высшие приближения	378
7.3.8. Неоднородная задача с точкой возврата второго порядка	382
7.3.9. Задачи с особенностями в точках возврата	383
7.3.10. Задачи высшего порядка с точками возврата	385
7.4. Волновые уравнения	386
7.4.1. Разложение Борна — Неймана и диаграммы Фейнмана	387
7.4.2. Методы перенормировки	393
7.4.3. Метод Рытова	399
7.4.4. Приближение геометрической оптики	400
7.4.5. Равномерное разложение на каустике	403
7.4.6. Метод сглаживания	407
Упражнения	409
Список литературы	413

Предметный указатель

- Автоколебания 103
- Алгоритм для канонических систем 229—233
- Кемела 186
- Аномалия 92
- Асимптотическая
- последовательность 21, 23, 25, 28
- — по дробным степеням 151
- — содержащая логарифмы 151, 159
- — факториальная 21
- Асимптотические ряды 18—20, 24—25
- Асимптотическое разбиение систем уравнений 349—353
- разложение 21, 23, 28—29, 33, 92,
- — равномерное 27—29
- — расходящееся 25
- условие срачивания, см.
- Срачивание асимптотических разложений
- Аэродинамика 125, 253
- Броуновское движение 253
- Быстропериодическая часть 184—207, 231
- Вариационный подход 233—240, 244
- Вариация произвольных постоянных 63, 174—240
- Вековые члены 33—36
- — исключение 78, 80, 280, 309, 323
- Вибрация 250, см. также Колебания, Волны
- ВКБ-приближение 59, 329, 337, 342, 346—347, 358, 362, 410
- Возмущение координат 13—15
- параметров 10—12, 329
- Волна Россби 90, 252
- Волновое число 69, 89, 285
- Волны 69, 71, 89, 91, 103, 233, 234, 251, 252
- на воде 67, 68, 69, 89, 234, 251, 252
- ударные 63, 91, 97, 98, 99, 114, 116, 253
- упругие 103, 108
- Вронскиан 175
- Вырождение 84—86
- Гамильтониан 195, 198, 199, 202, 205—216, 218, 229—233, 241, 242
- Гармонический баланс 236
- резонанс 237—238, 252, 281—288
- Гауссиан 389, 392, 395, 398
- Геометрическая оптика 330, 387, 400—403, 406
- Геофизика 125
- Гидравлический прыжок 103
- Граница тени 405
- Движение непериодическое 204, 253
- периодическое 204
- Диаграмма 390—392
- «голая» 390
- двойная 390
- «одетая» 391
- связанная 396, 397, 399
- Динамика снаряда 251, 312—316, 342—343
- Дисперсионное соотношение 193, 234, 236, 237, 238, 240, 244, 286, 322
- Дифракция 370, 406
- Френеля 407
- Жесткость на изгиб 47
- Задача Бенара 90
- Гретца 411
- двух тел 217
- Дирихле 48
- для уравнения теплопроводности 166—168
- Лиувилля 336
- на собственные значения, линейная 81—84
- — — нелинейная 84—88

- однородная 387
- — с точками возврата 376—388
- о космическом корабле Земля — Луна 54, 55, 96—97, 117, 118, 121, 151 — 154, 168—170, 250, 316—319, 324
- трех тел 214, 250, 296
- Закон теплопроводности Максвелла 56
- Затухание 57, 91
- Звуковой хлопок 91
- Изгиб оболочек и труб 66, 378
- Изменение типа уравнения 33, 48—53
- характеристик 103
- Импульс 195, 198, 205, 214, 242
- Интеграл уравнений движения 34, 215
- Интегральное уравнение 396, 407
- Источники неравномерности 33—66, 155
- Калибровочная функция 16
- Калибровочное преобразование 249
- Каноническая система 206, 217
- Канонические переменные 196, 198, 199, 211, 218, 233, 242
- уравнения 196, 215
- Каноническое преобразование 196, 203, 207
- Каустика 251, 401—407
- Качающаяся пружина 120, 201—205, 231—233, 242, 281—283
- Квант 69, 397, см. также Уравнение Шредингера
- Кинетика реакций 91, 92
- Колебания 35, 45, 103, 244, 250, 324
- балки 120, 121, 171, 244, 238
- релаксационные 45—46
- со скачками 45
- Консервативная форма уравнений 243
- Координаты возмущенные 9, 13—15, 31, 331—336, 379
- оптимальные 61—62
- параболические 92
- сферические 39
- Корреляция 389
- Космический корабль, см. Задача о космическом корабле Земля — Луна
- Коэффициент Пуассона 47, 58
- Коэффициенты Ламе в теории упругости 56, 104
- Краевое условие, перенос 37
- — потеря 42, 44, 48, 66, 125, 129, 137
- Лагранжиан 195, 201, 233—240
- Ламинарность 50, 66
- Ландау символы 16, 17
- Луна, см. Задача о космическом корабле Земля — Луна
- Малый делитель 212
- параметр при старшей производной 33, 41—48, 114, 399—340
- — — — — ограничение метода растянутых координат 114, 115—117
- Масштаб 63, 124, 247—250, 324, см. также Метод многих масштабов
- Матрица Якоби 219
- Маятник 118, 242, см. также Качающаяся пружина
- Медленно меняющаяся часть 184, 207, 226, 231
- Мембрана 382
- Метод Бенни 49—53
- Ван-дер-Поля 180—181
- Кемела 241
- Крылова — Боголюбова 181 — 183, 240
- Крылова — Боголюбова — Митропольского 189—195, 199, 210, 228, 229, 240, 241, 265, 266, 325
- Лайтхилла 68, 90—108, 121—123

- — — — — ограничения 79, 113—114, 122, 123
- Латты 159—168
- Линдштедта — Пуанкаре 67, 68, 69—71, 109, 110, 201, 216
- линеаризации 69, 108—109
- многих масштабов 62, 111, 115, 168, 245—328, 337, 339—342, 362, 385, 394, 405, 411
- — — — — обобщенная форма 249, 259—262, 296—324
- — — — — ограничения 324—325
- перенормировки 68, 109—113, 118—122, 330, 387, 393—399
- Прандтля 125, 128
- Притуло, см. Метод перенормировки
- Пуанкаре — Лайтхилла — Го, см. Метод Лайтхилла
- разложения двух переменных 262, 324
- — — — — ограничения 296
- — — — — описание 248, 258—259
- разложения производной 324
- — — — — ограничения 288—290
- — — — — описание 247, 254—258
- растянутых координат 62, 63, 67—124, 129, 171, 253, 324
- — — — — ограничения 92, 113—118, 122—124, 324, 325
- — — — — параметров 67, 69—91, 111, 113, 114, 118, 120
- Ритца — Галеркина 70
- Рытова 387, 399—400
- Рэлея — Шредингера 67, 81, 84
- сглаживания 330, 387, 407—409
- составных разложений 159—170, 340
- — — — — ограничения 168—170
- сращивания асимптотических разложений 48, 58, 63, 92, 124—159, 163, 168, 170, 253, 339, 370, 405, 411
- — — — — ограничения 171, 324, 362

- — — — — приложение к задачам о точках возврата 359—362
- Страбла 187—189, 192, 199, 210, 240
- — — — — ограничения 189
- Стюарта — Ватсона — Экхауса 177—179
- Темпла 68, 108—109
- Уизема 234—240
- Уиттекера 74—76, 79—81, 119, 201, 216
- усреднения 174—244
- — — — — обобщенный 183—186, 207, 228, 240—242
- Фробениуса 13, 332
- характеристик 400
- Механика полета 250
- Модель нелинейной неустойчивости 35—36, 61, 66, 110, 111, 114, 115, 284—286
- Томаса — Ферми 253
- Модуль Юнга 47
- Наложение 127, 134
- Начальный слой 33
- Небесная механика 250
- Неравномерность разложений 25—27, 34—41, 43, 45, 48, 49, 53, 55, 57—66, 114, 140, 151, 246, 305, 306, 337, 358, 393, 403—404
- Несимметричный изгиб пластины 46—48, 142—148, 171
- Неустойчивость 91, 288, см. также Модель нелинейной неустойчивости
- Рэлея — Тэйлора 90, 252
- Нормальное решение 69, 71, 79, 332, 348, 354
- Область бесконечная 34—41
- внешняя 127, 136
- внутренняя 127, 137, 162, 168
- краевого эффекта 125
- неравномерности 26, 27, 29, 33, 131, 148, 152, 155, 305, 359, 403—407

- Обобщенный вектор 195
- Оболочка 251
- Обтекание сферы 39—41, 154—159, 173
 - тела 43—44, 127
- Оператор интенсивности 398
 - массы 398, 408
 - самосопряженный 178, 179
 - сопряженный 179
 - Фаа де Бруно 208
- Оптимальное управление 92
- Орбиты 76
- Особая точка, определение 330—331
 - — разложение вблизи нерегулярной 330—333, 348—349
 - — регулярная 13, 331
- Особенность 16, 33, 43, 48, 54, 55, 94, 95, 97, 99, 100, 117, 151, 383—385
- Осцилятор Ван-дер-Поля 11—12, 45—46, 64, 65, 118, 183, 185—186, 192—193, 226—229, 240, 241, 264—266, 276—279, 292—295, 325, 326
 - линейный демпфируемый 244—262
- Парадокс Уайтхеда 41
- Параметр большой 337, см. также Точка возврата
 - возмущения 10—12, 25, 329, см. также Малый параметр при старшей производной, Метод растянутых параметров
 - характеристик 103, 108
- Параметризация 101, 105
- Переменная внешняя 134, 135, 159, 160
 - внутренняя 134, 135, 159, 165, 169
 - — выбор, 129—131, 137—138, 141, 148—149, 152—153
 - — обобщенная 161
 - Озеена 158
 - Стокса 159
- Перенормировка Борна 393—399
- Переходная кривая для точек либрации 76—81, 279—281, 295
 - — для уравнения Матье 71—76, 199—201, 210—216, 272—276
- Период 184, 207
- Плазма 69, 91, 233, 234, 251, 252, 393
- Пластичность 104
- Поверхностный слой 125
- Пограничный слой 27, 33, 44, 92, 125, 126, 162, 250, 378
 - — расположение 129—131, 137, 142—147
- Потенциал 36, 97, 103
- Поток в канале 66, 234
 - гиперзвуковой 91
 - по наклонной плоскости 48—53, 113
- Предел внешний 126, 131, 134, 143, 153, 160
 - внутренний 126, 132, 134, 144, 145, 153
 - Озеена 155
 - приемлемый 359
 - промежуточный 134
 - Стокса 155
- Предельный цикл, точка, решение 46, 114, 123
- Преобразование Дебри 218
 - каноническое 196, 206, 207, 215
 - Лангера 329, 370, 374, 411
 - — обобщение 365
 - Ли 217
 - Лиувилля — Грина 59, 337, 363
 - Олвера 365, 411, 412
 - почти тождественное 62, 68, 184, 206, 217
- Преобразование растяжения 125, 128, 129, 131, 132, 137—138, 148, 152—153, 166, 305, 359, 403—404
 - сжатия 155
 - фон Цайпеля 186, 207, 214, 218
 - Хори 218

- Приближение Борна 388
- Грина — Лиувилля 59, 337—339, 342, 346—347, 358
- Производящий вектор 217
- Разложение Борна 329, 387—393, 399
- внешнее 55, 58, 124, 126, 129, 131, 139, 141, 143—144, 153, 161
- внутреннее 124, 126, 128, 132, 139, 142, 144—151, 154, 160, 162, 164
- — в задачах о точках возврата 359
- Неймана 387, см. также Разложение Борна
- обобщенное, см. Разложение составное
- Озеена 155—159
- по характеристикам 68, 100—108, 324
- составное 129, 136, 139, 142, 147, 151, 154, 372—374, 411, 412
- — построение 136
- Рассеяние 68, 110, 253, 387, 390, 393, 394
- Расслоение 234
- Растяжение зависимых переменных 113, 123
- характеристик 101, 103
- Резкое изменение 118, 124, 324
- Резонанс 201, 205, 213, 243, 250, 267, 343—346
- параметрический 252
- Решение внешнее 127, 129
- внутреннее 126, 127
- периодическое 45, 90, 114, см. также Уравнение Матё, Устойчивость эллиптических треугольных точек
- составное 127
- Стокса 40
- Ряды, см. Асимптотические ряды
- и преобразования Ли 186, 215—233, 242, 325
- Неймана 389
- Сдвиг 90
- особенности 53—54, 63, 64, 92—96, 108—109, 112—113, 118, 120, 121
- Седловая точка 271
- Символы порядка 16, 17
- Сингулярное возмущение 27, 114, см. также Неравномерность разложений
- Скользкая опора 65, 140—142
- Скорости характеристические волновые 104
- Скорость 67, 69, 89, 90, 104, 105
- волн Рэлея 57, 148
- групповая 194, 236, 238, 287, 321
- фазовая 89, 90
- Случайная функция 386—388, 391, 392, 396, 407, 408, 409
- Собственное значение 67, см. также Задача на собственные значения
- Соотношение Рэнкина — Гюгонио 97
- Спутник 250, 296
- Сращивание внешнего и внутреннего разложений 62, 124, 129, 131, 134—136, 139, 142, 144—147, 150—151, 154, 405
- — — — в задачах о точках возврата 360—362, 367
- промежуточное 134
- процедура Прандтля 126, 133
- — усовершенствованная 133—134
- условие Ван Дайка 128, 134—136
- — Каплуна 134
- Статистическая механика 253
- Субнормальное решение 333, 353—354
- Сферическая каверна 91
- Сферический маятник 242
- Сшивка асимптотических разложений, см. Сращивание внешнего и внутреннего разложений
- Теория крыла 113, 253, 325

- — сверхзвуковая 36—38, 61, 91, 100—103, 107, 111, 112
- ньютоновская 92
- Флоке 71, 74, 76, 79
- Теплопроводность 56, 92, 97, 171, 366, 411
- Термоупругие волны 56—58, 148—151
- Течение Кельвина — Гельмгольца 90, 253
- Точка ветвления 95
- возврата 59—60, 128, 137, 305—307, 329, 330, 358—386, 403—407
- Точки либрации, см. Устойчивость эллиптических треугольных точек
- треугольные 250, см. также Устойчивость эллиптических треугольных точек
- Треугольник Ли 221, 222
- Паскаля 221
- Узел 271
- Упругость 56, 70, 103, 378
- Уравнение Беллмана 32
- Вернулли 97
- Бете — Салпетера 398
- Больцмана 253
- Брезертонa 237—238, 244, 286-288
- Власова 91, 233
- волновое 386—409
- Гамильтона — Якоби 197, 198, 202, 206, 215
- Гельмгольца 251
- гиперболическое 48, 53, 68, ИЗ, 406
- Дайсона 398, 408
- диффузии 48
- Дюффинга 34—35, 60, 61, 65, 69—71, 110—111, 118, 119, 182, 187—189, 190—192, 198—199, 208—210, 240—245, 290—292, 308—312
- Клейна — Гордона 89—90, 120, 190, 193—195, 239—240, 243, 251, 322—324
- Ландау 409
- Лиувилля 253, 407, 409
- Матьё 64, 70—73, 76, 118, 199-201, 210—216, 240, 272, 276, 325
- Озеена 156
- Орра — Зоммерфельда 233, 385
- параболическое 48, ИЗ, 406
- переноса 400, 405
- присоединенное 364
- Рейнольдса, см. Скользящая опора
- теплопроводности, краевая задача с начальными условиями 166—168
- Фоккера — Планка 253
- Хилла 71
- Шредингера 67, 84, 175, 362, 366, 368, 370
- экононала 400, 404, 405
- Эйри 333
- эллиптическое 48—53, 113, 252, 324, 386
- Уравнения в вариациях 187, 198, 200, 206
- Лагранжа 195
- Навье — Стокса 39, 43, 49
- Эйлера — Лагранжа 233, 236, 238, 240
- Условие прилипания 44
- разрешимости 167, 323
- совместности 235, 240
- Усреднение 195—240
- Устойчивость 71, 90, 91, 114, 115, 177—179, 252, 271, 378, 385
- эллиптических треугольных точек 76-81, 279-281, 295
- Фаза 194, 217, 406
- быстро вращающаяся 183, 217, 251
- Фейнмановские диаграммы 329, 387—399

Фокус 271
Фон Цайпеля процедура 205—216,
218, 248
— — ограничения 214
Функции Бесселя 9, 14, 25, 31, 334—
337, 351—353, 411
— Вебера 369, 405, 407
— Ломмеля 378
— параболического цилиндра 368,
405
— растягивающие 68, 91, 101, 114,
116, 117, 122
— Уиттекера 370
— цилиндрические 384, 405, 407
— Эйри 60, 359, 360, 405
— эллиптические Якоби 204
Функция Грина 388, 390, 407
— Матье 362

— производящая 197, 200, 205, 208,
211, 212, 215, 218, 232
— тока 39, 44, 50, 68, 127, 155
Характеристический показатель 69,
74, 79
Цилиндр твердый расширяющийся
97— 100
— эллиптический 370
Частота 67, 69, 111, 180, 270,
Число Маха 37, 97, 98
— Рейнольдса 50, 385
— — большое 43, 145
— — малое 39, 40, 154
Эксцентриситет 76, 250, 370
Энергетический уровень 67, 69
Энтропийный слой 92
Ядро 396

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая книга посвящена методам возмущений, или асимптотическим методам малого параметра для решения дифференциальных уравнений. Методы малого параметра представляют собой одно из наиболее мощных средств современной прикладной математики. Они позволяют получать приближенные аналитические представления решений весьма сложных линейных и нелинейных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

Методы малого параметра широко применяются в механике, физике и других науках, оперирующих дифференциальными уравнениями. Большинство этих методов (например, метод Пуанкаре, метод усреднения, метод пограничного слоя) первоначально возникли именно при решении конкретных задач механики и физики, а затем уже были развиты и обобщены. Впоследствии многие методы получили строгое математическое обоснование. Однако до сих пор целый ряд методов малого параметра, особенно применительно к нелинейным уравнениям в частных производных, нельзя считать строго обоснованными, и успех их применения часто бывает связан с глубоким и неформальным проникновением в суть задачи, с пониманием процессов, описываемых данными уравнениями. В настоящее время, в эпоху быстрого развития вычислительной техники, методы малого параметра отнюдь не утрачивают своего значения. Они служат для выяснения качественных особенностей задач, для получения асимптотик и анализа особых точек, для построения опорных „тестовых“ решений, а в ряде случаев являются также основой для разработки вычислительных методов.

Книга Али Хасана Найфэ представляет собой интересную и, на наш взгляд, успешную попытку дать систематическое и полное изложение многочисленных методов малого параметра. Автор подробно описывает различные варианты методов, дает их сравнительную оценку. Значительное место в книге занимают собственные результаты автора — известного специалиста в области асимптотических методов и их приложений. Изложение иллюстрируется большим числом задач из многих областей науки: небесной механики, гидродинамики, газовой динамики, теории упругости, теории колебаний и волн и др. К некоторым задачам

автор обращается многократно на протяжении всей книги, применяя к ним различные методы. Книга содержит также большое число интересных и поучительных задач, предлагаемых читателю в качестве упражнений.

Стиль изложения автора можно назвать промежуточным между математическим и физическим. С одной стороны, в книге не дается строгого обоснования рассматриваемых методов (хотя во многих случаях такие обоснования имеются), а с другой стороны, автор не обращается к физической интуиции читателя и не вникает в анализ физической сущности задач, рассматриваемых для иллюстрации асимптотических методов. Такой подход придает книге цельность, ограничивая имеющийся огромный материал, и позволяет сосредоточиться на изучении самих асимптотических методов, не требуя от читателя знакомства с отдельными областями физики и механики.

Книга снабжена обширной библиографией, которую мы дополнили некоторыми работами советских авторов за последние 10—15 лет. В авторских ссылках на книги советских авторов нами указаны последние издания.

При переводе книги встретились некоторые новые термины, введенные автором, а также такие термины, для которых в русской литературе по прикладной математике используется несколько различных вариантов перевода. В этих случаях переводчики и редактор стремились не к дословной близости, а к передаче смысла оригинала.

Главы 1, 2, 5—7 перевел А. А. Меликян; главы 3, 4—А. А. Миронов.

Ф. Л. Черноусько

Предисловие

Многие задачи, с которыми сталкиваются сегодня физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями, или численными методами, или комбинацией тех и других. Среди приближенных методов основными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты. Настоящая книга посвящена описанию этих методов.

В соответствии с методами возмущений решение задачи представляется несколькими (обычно двумя) первыми членами возмущенного разложения. Для качественного и количественного представления решения возмущенные разложения, даже если они расходятся, могут оказаться более полезными, чем равномерно и абсолютно сходящиеся разложения.

Прямые, непосредственные разложения по степеням параметра имеют, как правило, ограниченные области пригодности и нарушаются в некоторых областях, называемых областями неравномерности. Для приведения этих разложений к равномерно пригодному виду исследователи, работающие в различных областях физики, техники и прикладной математики, разработали ряд методов. Некоторые из этих методов между собой совершенно несхожи, другие являются различными интерпретациями одной и той же основной идеи.

Цель настоящей книги — рассмотреть некоторые из упомянутых методов, выявить их сходства и различия, преимущества и ограничения. Для описания различных методов сначала используются примеры с модельными простыми обыкновенными уравнениями, которые могут быть точно решены, затем, по мере усложнения, рассматриваются примеры с дифференциальными уравнениями в частных производных. Примеры взяты из разных областей физики и техники. Каждому примеру предпослано краткое физическое описание задачи.

Различные методы описаны как формальные процедуры, без попытки строгого их обоснования. Разложения, полученные для

некоторых сложных примеров, рассмотренных в данной книге, еще не имеют на самом деле строгого математического обоснования.

В конце каждой главы даются упражнения, которые расположены в порядке возрастающей сложности и снабжены дополнительными ссылками.

От читателя не требуется понимания физической сути примеров, используемых для описания методов. Предполагается, однако, что он знаком с основами анализа, а также с элементарными свойствами дифференциальных уравнений—обыкновенных и в частных производных.

Глава 1 содержит обозначения, определения и действия над асимптотическими разложениями. Источники неравномерности в разложениях возмущения классифицированы и рассмотрены в главе 2. Глава 3 посвящена методу координатных преобразований, в котором равномерность достигается путем разложения как зависимой, так и независимой переменных в ряды по новым независимым параметрам. В главе 4 описываются метод сращения асимптотических разложений и метод составных асимптотических разложений. Первый метод позволяет выразить решение с помощью нескольких разложений, пригодных в различных областях и согласованных между собой с помощью процедуры сращения; второй метод представляет решение в виде единственного всюду пригодного разложения. В главе 5 для исследования медленных изменений амплитуд и фаз слабо нелинейных волн и колебаний используются понятия быстрых и медленных переменных в сочетании с методом вариации произвольных постоянных. Методы глав 3, 4 и 5 обобщены в главе 6 и объединены в одну из трех разновидностей метода многих масштабов. В главе 7 рассмотрены существующие методы построения асимптотических решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Первые слова благодарности я обязан сказать доктору В. С. Са-рику и моим братьям—д-ру Аднану Найфэ и Муниру Найфэ—за обсуждения и поддержку в процессе написания этой книги. За плодотворные обсуждения и критику я обязан также некоторым своим коллегам, в частности д-рам Д. Т. Муку, Д. П. Телионису, А. А. Кемелу и Б. Х. Стефану, а также О. Р. Асфару и М. С. Цею. Эта книга не была бы написана, если бы не терпение и поддержка моей жены и настойчивость моих родителей Хасана и Хадры, которые, будучи неграмотными, настояли на том, чтобы я получил высшее образование. Поэтому я посвящаю эту книгу моим родителям и жене.

Али Хасан Найфэ

Введение

Большинство физических задач, с которыми сталкиваются сегодня инженеры, физики и специалисты в области прикладной математики, обнаруживает ряд существенных особенностей, которые не позволяют получать точные аналитические решения. Таковыми особенностями являются, например, нелинейности, переменные коэффициенты, границы сложной формы и нелинейные граничные условия на известных или, в некоторых случаях, неизвестных границах. Если даже точное решение некоторой задачи явно найдено, оно может оказаться бесполезным для математической и физической интерпретаций или численных расчетов. Примерами таких задач являются функции Бесселя большого порядка при больших значениях аргумента и двоякопериодические функции. Таким образом, для получения информации о решениях уравнений мы вынуждены прибегнуть к аппроксимациям, численным решениям или к сочетанию этих двух методов. Среди приближенных методов прежде всего следует назвать асимптотические методы возмущений, которые и являются предметом этой книги. Согласно этим методикам, решение представляется несколькими первыми членами асимптотического разложения, число которых обычно не превышает двух. Разложения могут проводиться по большому или малому параметру, который естественно возникает в уравнениях или вводится искусственно для удобства. Такие разложения называются *возмущениями по параметру*. С другой стороны, разложения могут быть проведены по координатам для больших или малых значений; в этом случае они называются *возмущениями по координатам*. Примеры разложений по параметру и координате и их существенные характеристики даны в § 1.1 и 1.2. Для формализации понятий пределов, оценок погрешности в § 1.3 введены определения символов порядка и другие обозначения. Параграф 1.4 содержит определения асимптотического разложения, асимптотической последовательности и степенного ряда; в § 1.5 дается сравнение сходящегося и асимптотического рядов. Затем, в § 1.6 определены равномерные и неравномерные асимптотические разложения. Краткая сводка операций над асимптотическими разложениями дана в § 1.7.

1.1. Возмущения по параметру

Математическая формулировка многих физических задач, в которых встречается функция вида $u(x, \varepsilon)$, может быть дана с помощью дифференциального уравнения $L(u, x, \varepsilon) = 0$ с граничным условием $B(u, \varepsilon) = 0$, где x — скалярная или векторная независимая переменная, а ε — параметр. Такая задача, вообще говоря, не может быть решена точно. Однако если существует $\varepsilon = \varepsilon_0$ (выбором отсчета ε можно добиться $\varepsilon_0 = 0$), для которого вышеупомянутая задача решается точно или сравнительно легко, то для малых ε можно искать решение, скажем, в виде разложения по степеням ε , т. е. в виде

$$u(x; \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots, \quad (1.1.1)$$

где u_n не зависит от ε , а $u_0(x)$ — решение задачи при $\varepsilon = 0$. Это разложение можно подставить затем в равенства $L(u, x, \varepsilon) = 0$ и $B(u, \varepsilon) = 0$, разложить их для малых ε и сгруппировать коэффициенты при каждой степени ε . Поскольку эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений ε и последовательность степеней ε линейно независима, коэффициент при каждой степени ε обращается в нуль независимо. При этом обычно получаются простые уравнения относительно u_n , которые последовательно решаются. Следующие два примера иллюстрируют сказанное.

1.1.1. Алгебраическое уравнение

Рассмотрим сначала решение алгебраического уравнения

$$u = 1 + \varepsilon u^3 \quad (1.1.2)$$

при малом ε . Для $\varepsilon = 0$ имеем $u = 1$. Пусть ε мало и отлично от нуля. Положим

$$u = 1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, \quad (1.1.3)$$

Тогда (1.1.2) принимает вид

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \varepsilon (1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)^3. \quad (1.1.4)$$

Проведя в (1.1.4) разложение при малом ε , получим

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \varepsilon [1 + 3\varepsilon u_1 + 3\varepsilon^2 (u_2 + u_1^2) + \dots]. \quad (1.1.5)$$

Сгруппировав коэффициенты при одинаковых степенях ε , будем иметь

$$\varepsilon (u_1 - 1) + \varepsilon^2 (u_2 - 3u_1) + \varepsilon^3 (u_3 - 3u_2 - 3u_1^2) + \dots = 0. \quad (1.1.6)$$

Поскольку это уравнение выполняется тождественно по ε , коэффициент при каждой степени ε обращается в нуль независимо.

Таким образом,

$$u_1 - 1 = 0, \quad (1.1.7)$$

$$u_2 - 3u_1 = 0, \quad (1.1.8)$$

$$u_3 - 3u_2 - 3u_1^2 = 0. \quad (1.1.9)$$

Решением уравнения (1.1.7) является

$$u_1 = 1. \quad (1.1.10)$$

Тогда решением (1.1.8) будет

$$u_2 = 3u_1 = 3, \quad (1.1.11)$$

а решением (1.1.9)

$$u_3 = 3u_2 + 3u_1^2 = 12. \quad (1.1.12)$$

Следовательно, (1.1.3) принимает вид

$$u = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + \dots, \quad (1.1.13)$$

где многоточием заменены все члены, содержащие ε^n при $n \geq 4$. Таким образом, (1.1.13) является аппроксимацией решения уравнения (1.1.2), которое равно 1 при $\varepsilon \equiv 0$.

1.1.2. Осциллятор Ван-дер-Поля

В качестве второго примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля [1922]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (1.1.14)$$

для малого ε . При $\varepsilon = 0$ оно сводится к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0, \quad (1.1.15)$$

общее решение которого имеет вид

$$u = a \cos(t + \varphi), \quad (1.1.16)$$

где a и φ — постоянные. Для определения лучшего приближения к решению уравнения (1.1.14) будем искать возмущенное разложение вида

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots, \quad (1.1.17)$$

где многоточие заменяет слагаемые, пропорциональные степеням ε , большим двух. Подставляя это разложение в (1.1.14), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots = \\ & = \varepsilon [1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2] \left[\frac{du_0}{dt} + \varepsilon \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{du_2}{dt} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Проведя разложение для малых ε , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots = \\ = \varepsilon (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} + \varepsilon^2 \left[(1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Поскольку u_n не зависит от ε и (1.1.19) справедливо для всех достаточно малых значений ε , коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этого уравнения должны быть равны. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях (1.1.19), получим:

для коэффициентов при ε^0

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0, \quad (1.1.20)$$

для коэффициентов при ε

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt}, \quad (1.1.21)$$

для коэффициентов при ε^2

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = (1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt}. \quad (1.1.22)$$

Заметим, что уравнение (1.1.20) совпадает с (1.1.15) и его общее решение имеет вид (1.1.16), т. е.

$$u_0 = a \cos(t + \varphi). \quad (1.1.23)$$

Подставляя в (1.1.21) выражение для u_0 , получаем

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = -[1 - a^2 \cos^2(t + \varphi)] a \sin(t + \varphi).$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\cos^2(t + \varphi) \sin(t + \varphi) = \frac{\sin(t + \varphi) + \sin 3(t + \varphi)}{4},$$

перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = \frac{a^3 - 4a}{4} \sin(t + \varphi) + \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t + \varphi). \quad (1.1.24)$$

Частным решением его является функция

$$u_1 = -\frac{a^3 - 4a}{8} t \cos(t + \varphi) - \frac{1}{32} a^3 \sin 3(t + \varphi). \quad (1.1.25)$$

Коль скоро известны u_0 и u_1 , известна и правая часть уравнения (1.1.22), и его аналогичным образом можно разрешить относительно u_2 . Вопрос о том, насколько полезно полученное таким образом разложение, является предметом изучения этой книги.

1.2. Возмущения по координате

Пусть некоторая физическая задача математически описывается дифференциальным уравнением $L(u, x) = 0$ с граничным условием $B(u) = 0$, где x — скаляр, и пусть известен вид u_0 решения u при $x \rightarrow x_0$ (x_0 можно сделать равным 0 или ∞). Тогда можно попытаться найти отклонение функции u от u_0 для x , близких к x_0 , раскладывая это отклонение по степеням x при $x_0 = 0$ или по степеням x^{-1} при $x_0 = \infty$. Эта техника демонстрируется на следующих двух примерах.

1.2.1. Уравнение Бесселя нулевого порядка

Мы будем рассматривать решение уравнения

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0. \quad (1.2.1)$$

Это уравнение имеет регулярную особую точку $x=0$, что наводит на мысль искать решение y в виде степенного ряда, используя метод Фробениуса (например, Айнс [1926, раздел 16.1]). Полагаем, таким образом,

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m}, \quad (1.2.2)$$

где число μ и коэффициенты a_m должны быть определены так, чтобы (1.2.2) было решением уравнения (1.2.1).

Подстановка (1.2.2) в (1.2.1) дает

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} (\mu+m)(\mu+m-1) a_m x^{\mu+m-1} + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} (\mu+m) a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\mu+m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0, \quad (1.2.3)$$

что можно записать в виде

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu+1)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{m=2}^{\infty} (\mu+m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0.$$

Заменив в первой сумме индекс m на $m+2$, можем переписать это уравнение в виде

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu+1)^2 a_1 x^\mu + \sum_{m=0}^{\infty} [(\mu+m+2)^2 a_{m+2} + a_m] x^{\mu+m+1} = 0. \quad (1.2.4)$$

Поскольку (1.2.4) является тождеством по x , коэффициент при каждой степени x должен обратиться в нуль независимо, т. е.

$$\mu^2 a_0 = 0, \quad (1.2.5)$$

$$(\mu+1)^2 a_1 = 0, \quad (1.2.6)$$

$$(\mu+m+2)^2 a_{m+2} + a_m = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.7)$$

Если положить $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения следует $\mu=0$; тогда (1.2.6) дает $a_1=0$, а из (1.2.7) следует

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\mu+m+2)^2}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= 0, & m &= 1, 2, 3, \dots, \\ a_2 &= -\frac{a_0}{2^2}, & a_4 &= \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}, & a_6 &= -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}, \\ a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

При $a_0=1$ полученное решение представляет собой функцию Бесселя нулевого порядка и часто обозначается через $J_0(x)$. Таким образом,

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} + \dots \quad (1.2.10)$$

Поскольку отношение n -го члена к $(n-1)$ -му равно $-x^2/(2n)^2$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для всех значений x , ряд (1.2.10) для функции $J_0(x)$ сходится равномерно и абсолютно при всех значениях x .

В п. 7.1.2 получено разложение $J_0(x)$, справедливое для больших значений x ; в § 1.5 оно сравнивается с разложением, полученным выше.

1.2.2. Простой пример

В качестве второго примера мы рассмотрим решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} \quad (1.2.11)$$

при больших x . Будем искать это решение при больших x в виде

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m}. \quad (1.2.12)$$

Подстановка этого разложения в (1.2.11) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} -m a_m x^{-m-1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{-m} + (a_1 - 1) x^{-1} = 0. \quad (1.2.13)$$

Заменив во второй сумме индекс m на $m+1$, можем переписать это уравнение в виде

$$(a_1 - 1) x^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m+1} - m a_m) x^{-m-1} = 0. \quad (1.2.14)$$

Полученное уравнение является тождеством по x , поэтому коэффициент при каждом x^{-m} должен обратиться в нуль независимо, т. е.

$$a_1 = 1, \quad a_{m+1} = m a_m \quad \text{для } m \geq 1. \quad (1.2.15)$$

Следовательно,

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2!, \quad a_4 = 3!, \quad a_n = (n-1)!,$$

и (1.2.12) принимает вид

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots \quad (1.2.16)$$

Поскольку отношение n -го к $(n-1)$ -му члену равно $(n-1)x^{-1}$ и стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ независимо от значения x , то ряд (1.2.16) расходится при всех значениях x . В § 1.4 показано, что, несмотря на расходимость, этот ряд оказывается полезным для численных расчетов; он носит название *асимптотического ряда*.

1.3. Символы порядка и калибровочные функции

Предположим, что мы интересуемся функцией единственного вещественного параметра ϵ , которую будем обозначать $f(\epsilon)$. При выводе аппроксимаций нас будет интересовать предел $f(\epsilon)$ при ϵ ,

стремящемся к нулю, что будем обозначать как $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел может зависеть от того, стремится ли ε к нулю снизу, что обозначаем как $\varepsilon \uparrow 0$, или сверху, $\varepsilon \downarrow 0$. Если предел функции $f(\varepsilon)$ существует (т. е. у нее нет существенных особенностей при $\varepsilon = 0$, таких, как у функции $\sin \varepsilon^{-1}$), то имеет место одна из трех возможностей:

$$\left. \begin{array}{l} f(\varepsilon) \rightarrow 0 \\ f(\varepsilon) \rightarrow A \\ f(\varepsilon) \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < A < \infty. \quad (1.3.1)$$

В первом и последнем случаях скорости сходимости $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $f(\varepsilon) \rightarrow \infty$ оцениваются сравнением $f(\varepsilon)$ с известными функциями, которые называются *калибровочными функциями*. Простейшими и наиболее употребительными из них являются следующие:

$$\dots, \varepsilon^{-n}, \dots, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n, \dots$$

В некоторых случаях к ним должны быть добавлены функции $\log \varepsilon^{-1}$, $\log(\log \varepsilon^{-1})$, $e^{\varepsilon^{-1}}$, $e^{-\varepsilon^{-1}}$ и т. д.

Другими примерами калибровочных функций являются функции $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$, $\operatorname{tg} \varepsilon$, $\operatorname{sh} \varepsilon$, $\operatorname{ch} \varepsilon$, $\operatorname{th} \varepsilon$ и т. д.

При сравнении поведения функции $f(\varepsilon)$ с калибровочной функцией $g(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ используется один из двух символов Ландау: O или o .

Символ O

Мы пишем

$$f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3.2)$$

если существуют положительное число A , не зависящее от ε , и значение $\varepsilon_0 > 0$, такие, что

$$|f(\varepsilon)| \leq A |g(\varepsilon)| \quad \text{для всех } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0. \quad (1.3.3)$$

Это условие может быть заменено следующим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| < \infty. \quad (1.3.4)$$

Например, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{array}{ll} \sin \varepsilon = O(\varepsilon), & \sin \varepsilon^2 = O(\varepsilon^2), \\ \sin 7\varepsilon = O(\varepsilon), & \sin 2\varepsilon - 2\varepsilon = O(\varepsilon^3), \\ \cos \varepsilon = O(1), & 1 - \cos \varepsilon = O(\varepsilon^2), \\ J_0(\varepsilon) = O(1), & J_0(\varepsilon) - 1 = O(\varepsilon^2), \\ \operatorname{sh} \varepsilon = O(\varepsilon), & \operatorname{ch} \varepsilon = O(1), \\ \operatorname{th} \varepsilon = O(\varepsilon), & \operatorname{tg} \varepsilon = O(\varepsilon), \\ \operatorname{cth} \varepsilon = O(\varepsilon^{-1}), & \operatorname{ctg} \varepsilon = O(\varepsilon^{-1}). \end{array}$$

Если, кроме ε , функция f зависит и от другой переменной x , а $g(x, \varepsilon)$ — калибровочная функция, то по-прежнему пишем

$$f(x, \varepsilon) = O[g(x, \varepsilon)] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3.5)$$

если существуют положительное число A , не зависящее от ε , и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что

$$|f(x, \varepsilon)| \leq A |g(x, \varepsilon)| \quad \text{для всех } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0. \quad (1.3.6)$$

Если A и ε_0 не зависят от x , то говорят, что соотношение (1.3.5) выполняется *равномерно*. Например,

$$\sin(x + \varepsilon) = O(1) = O[\sin(x)] \quad \text{равномерно}^1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

в то время как

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon i} - 1 &= O(\varepsilon) \quad \text{неравномерно при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x} &= O(\varepsilon) \quad \text{неравномерно при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Символ o

Мы пишем

$$f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3.7)$$

если для каждого положительного числа δ , не зависящего от ε , существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |g(\varepsilon)| \quad \text{для } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0. \quad (1.3.8)$$

Это условие может быть заменено следующим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0. \quad (1.3.9)$$

Таким образом, имеем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= o(1), & \sin \varepsilon^2 &= o(\varepsilon), \\ \cos \varepsilon &= o(\varepsilon^{-1/2}), & J_0(\varepsilon) &= o(\varepsilon^{-1}), \\ \operatorname{cth} \varepsilon &= o(\varepsilon^{-3/2}), & \operatorname{clg} \varepsilon &= o[\varepsilon^{-(n+1)/n}] \quad \text{для положительных } n, \\ 1 - \cos 3\varepsilon &= o(\varepsilon), & \exp(-\varepsilon^{-1}) &= o(\varepsilon^n) \quad \text{для всех } n. \end{aligned}$$

Если $f = f(x, \varepsilon)$ и $g = g(x, \varepsilon)$, то говорят, что (1.3.7) выполняется *равномерно*, если δ и ε_0 не зависят от x . Например,

$$\sin(x + \varepsilon) = o(\varepsilon^{-1/3}) \quad \text{равномерно при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

в то время как

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon i} - 1 &= o(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{неравномерно при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x} &= o(\varepsilon^{3/4}) \quad \text{неравномерно при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Второе из приведенных соотношений выполняется равномерно по x для интервалов изменения x , в которых $\sin x \neq 0$. — *Прим. ред.*

1.4. Асимптотические разложения и последовательности

1.4.1. Асимптотические ряды

Мы установили в п. 1.2.2, что частным решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} \quad (1.4.1)$$

является ряд

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots, \quad (1.4.2)$$

который расходится для всех значений x . Чтобы выяснить, насколько этот ряд может оказаться полезным при вычислении частного решения нашего уравнения, определим остаток при усечении ряда на n -м члене. Для этого заметим, что частное решение дифференциального уравнения задается интегралом

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-1} e^x dx, \quad (1.4.3)$$

сходящимся при отрицательных x . Интегрируя (1.4.3) по частям, получим

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} + e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-2} e^x dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-3} e^x dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + 3!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-4} e^x dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + n!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Следовательно, если мы усечем ряд на n -м члене, то остаток как функция n и x будет иметь вид

$$R_n = n!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx. \quad (1.4.5)$$

Для сходимости ряда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ должен равняться нулю.

В нашем примере это не выполнено. Действительно, при $n \rightarrow \infty$ имеем $R_n \rightarrow \infty$, так что ряд расходится для всех x , в согласии с тем, что мы установили в п. 1.2.2, используя другой признак сходимости. Поэтому ряд (1.4.2) может оказаться полезным только

при фиксированном n . Для отрицательных x имеем

$$|R_n| \leq n! |x^{-n-1}| e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{n!}{|x^{n+1}|}. \quad (1.4.6)$$

Таким образом, ошибка, связанная с усечением ряда на n -м члене, численно не превосходит первого отброшенного члена, а именно $(n+1)$ -го. Более того, при фиксированном n и $|x| \rightarrow \infty$ имеем $R_n \rightarrow 0$. Поэтому, хотя ряд (1.4.2) и расходится, для фиксированного n первые n членов ряда могут представлять y с ошибкой, которая может быть сделана произвольно малой при выборе достаточно большого значения $|x|$. Подобный ряд называется *асимптотическим рядом типа Пуанкаре* (Пуанкаре [1892]) и обозначается

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.4.7)$$

Вообще, для заданного ряда $\sum_{m=0}^{\infty} (a_m/x^m)$, где a_m не зависит

от x , мы говорим, что он является *асимптотическим рядом*, и пишем

$$y \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{x^m} \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.4.8)$$

тогда и только тогда, когда

$$y = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{x^m} + o(|x|^{-n}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.4.9)$$

Условие (1.4.9) можно переписать в виде

$$y = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_m}{x^m} + O(|x|^{-n}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.4.10)$$

В качестве другого примера рассмотрим, как это было сделано Эйлером [1754], вопрос об оценке интеграла

$$f(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\omega+x} dx \quad (1.4.11)$$

для больших положительных ω . Поскольку

$$\frac{\omega}{\omega+x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{\omega^{m+1}}, \quad \text{если } x < \omega, \quad (1.4.12)$$

и

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx = m!, \quad (1.4.13)$$

имеем

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m}. \quad (1.4.14)$$

Поскольку отношение m -го члена к $(m-1)$ -му, равное $-m\omega^{-1}$, стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$, ряд (1.4.14) расходится для всех значений ω .

Чтобы выяснить, является ли ряд (1.4.14) асимптотическим, вычислим остаток, получающийся при усечении ряда на n -м члене. Заметим для этого, что

$$\frac{\omega}{\omega+x} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^m}{\omega^m} + \frac{(-1)^n x^n}{\omega^{n-1}(\omega+x)}. \quad (1.4.15)$$

Следовательно,

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} + R_n, \quad (1.4.16)$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n}{\omega^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x}}{\omega+x} dx; \quad |R_n| < \frac{1}{\omega^n} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{n!}{\omega^n}. \quad (1.4.17)$$

Итак, ошибка, обусловленная усечением ряда на n -м члене, численно не превосходит первого отброшенного члена, и мы имеем¹⁾

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} + O(\omega^{-n}). \quad (1.4.18)$$

Поэтому ряд (1.4.14) является асимптотическим:

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m}. \quad (1.4.19)$$

¹⁾ В формулах (1.4.17), (1.4.18) оригинала имеются неточности, которые исправлены при переводе.— *Прим. ред.*

1.4.2. Асимптотические разложения

Для представления функции вовсе не обязательно использовать степенной ряд. Вместо него можно использовать последовательность функций общего вида $\delta_n(\varepsilon)$, если только

$$\delta_n(\varepsilon) = o[\delta_{n-1}(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.20)$$

Такая последовательность называется *асимптотической последовательностью*. Примерами таких асимптотических последовательностей являются

$$\varepsilon^n, \quad \varepsilon^{n/3}, \quad (\log \varepsilon)^{-n}, \quad (\sin \varepsilon)^n, \quad (\operatorname{ctg} \varepsilon)^{-n}. \quad (1.4.21)$$

В терминах асимптотических последовательностей мы можем определить асимптотические разложения. Итак, про заданную

сумму $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\varepsilon)$, где a_m не зависит от ε , а $\delta_m(\varepsilon)$ есть асимптотическая последовательность, мы говорим, что она является *асимптотическим разложением*, и пишем

$$y \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.4.22)$$

тогда и только тогда, когда

$$y = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\varepsilon) + O[\delta_n(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.23)$$

Очевидно, что асимптотический ряд есть частный случай асимптотического разложения.

В качестве примера асимптотического разложения, не являющегося асимптотическим степенным рядом, мы снова рассмотрим интеграл (1.4.11). Следуя Ван-дер-Корпуту [1962], мы представим $f(\omega)$ в терминах факториальной асимптотической последовательности $[(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+n)]^{-1}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega+x} &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+x)} = \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+1)} + \frac{x(x-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+x)} = \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+1)} + \frac{x(x-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+x)}. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

И вообще,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x(x-1)\dots(x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+m)} + \\ &+ \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n)}{(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+n)(\omega+x)}. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Это равенство доказывается по индукции следующим образом. Если (1.4.25) верно для n , то мы покажем, что это равенство верно и для $n+1$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} = & \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x(x-1) \dots (x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+m)} + \\ & + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1) \dots (x-n)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+n+1)} - \\ & - \frac{(-1)^{n+1} x(x-1) \dots (x-n)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+n+1)} + \\ & + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1) \dots (x-n)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+n)(\omega+x)}. \end{aligned}$$

Объединяя два последних слагаемых и распространяя суммирование до $n+1$, мы можем переписать это выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} = & \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m x(x-1) \dots (x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+m)} + \\ & + \frac{(-1)^{n+2} x(x-1) \dots (x-n-1)}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+n+1)(\omega+x)}. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

Таким образом, если равенство (1.4.25) верно для n , то (1.4.26) устанавливает его справедливость для $n+1$. Поскольку, согласно (1.4.24), равенство (1.4.25) верно для $n=0, 1$ и 2 , оно верно и для $n=3, 4, 5, \dots$. Поэтому оно верно для всех n .

Умножая (1.4.25) на $\exp(-x)$ и интегрируя от $x=0$ до $x=\infty$, получим

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^n a_m \delta_m(\omega) + R_n(\omega), \quad (1.4.27)$$

где

$$a_m = \int_0^{\infty} x(x-1) \dots (x-m+1) e^{-x} dx, \quad (1.4.28)$$

$$\delta_m(\omega) = (-1)^m [(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+m)]^{-1}, \quad (1.4.29)$$

$$R_n = -\delta_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{x(x-1) \dots (x-n)}{\omega+n+x-n} e^{-x} dx. \quad (1.4.30)$$

Поскольку ω — большое положительное число,

$$\begin{aligned} |R_n| & < |\delta_n(\omega)| \cdot \left| \int_0^{\infty} x(x-1) \dots (x-n+1) e^{-x} dx \right| = \\ & = |a_n| \cdot |\delta_n(\omega)|. \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

Таким образом, ошибка, связанная с тем, что мы сохраняем только n первых членов, численно не превосходит n -го члена, и,

следовательно,

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\omega) + O[\delta_n(\omega)]. \quad (1.4.32)$$

Поскольку $\delta_m(\omega)$ — асимптотическая последовательность при $\omega \rightarrow \infty$, имеем

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\omega) \text{ при } \omega \rightarrow \infty. \quad (1.4.33)$$

1.4.3. Единственность асимптотических разложений

В предыдущих двух пунктах мы показали, что имеют место соотношения

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} \text{ при } \omega \rightarrow \infty \quad (1.4.34)$$

и

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \int_0^{\infty} x(x-1) \dots (x+1-m) e^{-x} dx}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+m)} \text{ при } \omega \rightarrow \infty. \quad (1.4.35)$$

Таким образом, асимптотическое представление функции $f(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ не единственно. В самом деле, функция $f(\omega)$ может быть представлена бесконечным числом асимптотических разложений, поскольку существует бесконечное число асимптотических последовательностей, которые могут быть использованы для такого представления. Однако для заданной асимптотической последовательности $\delta_m(\omega)$ представление функции $f(\omega)$ с ее помощью единственно. В этом случае имеем

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\omega) \text{ при } \omega \rightarrow \infty, \quad (1.4.36)$$

где a_m единственным образом определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega)}{\delta_0(\omega)}, & a_1 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega) - a_0 \delta_0(\omega)}{\delta_1(\omega)}, \\ a_n &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\omega)}{\delta_n(\omega)}. \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

1.5. Сравнение сходящегося и асимптотического рядов

Мы установили в п. 1.2.1, что одно из решений уравнения Бесселя

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (1.5.1)$$

задается рядом

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} + \dots, \quad (1.5.2)$$

равномерно и абсолютно сходящимся для всех значений x .

Другое представление для J_0 можно получить, заметив, что замена переменных

$$y = x^{-1/2} y_1 \quad (1.5.3)$$

преобразует уравнение (1.5.1) в

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y_1 = 0. \quad (1.5.4)$$

При $x \rightarrow \infty$ это уравнение стремится к виду

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + y_1 = 0 \quad (1.5.5)$$

с решениями

$$y_1 = e^{\pm ix}. \quad (1.5.6)$$

Это наводит на мысль о преобразовании вида

$$y_1 = e^{ix} y_2, \quad (1.5.7)$$

которое приводит к уравнению

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + 2i \frac{dy_2}{dx} + \frac{1}{4x^2} y_2 = 0. \quad (1.5.8)$$

Это уравнение формально удовлетворяется рядом

$$y_2 = 1 - \frac{1}{8x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{8^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{8^3 \cdot 3! \cdot x^3} i + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \dots \quad (1.5.9)$$

Заменяв в этом ряду i на $-i$ и комбинируя полученный ряд с исходным, получим следующие два независимых решения:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &\sim x^{-1/2} (u \cos x + v \sin x), \\ y^{(2)} &\sim x^{-1/2} (u \sin x - v \cos x), \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{1 \cdot 3^2}{8^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \dots, \\ v &= \frac{1}{8x} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{8^3 \cdot 3! \cdot x^3} + \dots \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Используя интегральное представление

$$\pi J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta, \quad (1.5.12)$$

мы получаем связь между $J_0(x)$ и этими двумя независимыми решениями (см. п. 7.1.2):

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + v \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \right]. \quad (1.5.13)$$

Проверка сходимости рядов с помощью отношения двух соседних членов показывает, что y_2 , u и v , а следовательно, и правая часть (1.5.13), расходятся для всех значений x . Однако для больших x слагаемые в u и v убывают быстро с ростом номера, так что (1.5.13) задает асимптотическое разложение для больших x .

Для малых x первые несколько членов в (1.5.2) дают вполне хорошую точность. В самом деле, первые 9 членов дают значение $J_0(2)$ с точностью до 11 значащих цифр. Однако с ростом x число членов, необходимых для обеспечения такой точности, быстро растет. При $x=4$ восемь членов дают точность до третьей значащей цифры, в то время как такую точность обеспечивает первый член асимптотического разложения (1.5.13). При дальнейшем росте x с гораздо меньшей затратой труда можно получить хорошую точность, используя асимптотический расходящийся ряд (1.5.13).

1.6. Неравномерные разложения

В задачах с возмущениями по параметру функции, подлежащие разложению, могут зависеть от одной или большего числа переменных, не считая параметра возмущения. Если построить асимптотическое разложение функции $f(x; \epsilon)$, где x — скалярная или векторная переменная, не зависящая от ϵ , по асимптотической последовательности $\delta_m(\epsilon)$, то получим

$$f(x; \epsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) \delta_m(\epsilon) \text{ при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (1.6.1)$$

Здесь коэффициенты a_m являются функциями только переменной x . Говорят, что разложение (1.6.1) *равномерно пригодно*,

если

$$f(x; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m(x) \delta_m(\varepsilon) + R_N(x; \varepsilon), \quad (1.6.2a)$$

$$R_N(x; \varepsilon) = O[\delta_N(\varepsilon)] \text{ равномерно для всех рассматриваемых } x. \quad (1.6.2b)$$

В противном случае говорят, что разложение является *неравномерно пригодным* (такое разложение часто называют сингулярным разложением возмущения). Для того чтобы условия равномерности (1.6.2) выполнялись, необходимо, чтобы для каждого m слагаемое $a_m(x) \delta_m(\varepsilon)$ было мало по сравнению с предыдущим $a_{m-1}(x) \delta_{m-1}(\varepsilon)$. Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\delta_m(\varepsilon) = o[\delta_{m-1}(\varepsilon)]$, для равномерности разложения мы должны требовать, чтобы для всех рассматриваемых x $a_m(x)$ было *не более сингулярным, чем $a_{m-1}(x)$* . Другими словами, каждый член должен быть малой поправкой к предыдущему члену независимо от значения x . Равномерно пригодным разложением является следующее:

$$\begin{aligned} \sin(x + \varepsilon) &= \\ &= \sin x \cos \varepsilon + \cos x \sin \varepsilon = \\ &= \sin x \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \frac{\varepsilon^6}{6!} + \dots \right) + \cos x \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= \sin x + \varepsilon \cos x - \frac{\varepsilon^2}{2!} \sin x - \frac{\varepsilon^3}{3!} \cos x + \frac{\varepsilon^4}{4!} \sin x + \frac{\varepsilon^5}{5!} \cos x - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^6}{6!} \sin x - \frac{\varepsilon^7}{7!} \cos x + \dots \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Заметим, что коэффициенты при всех степенях ε ограничены для всех значений x , поэтому $a_m(x)$ не более сингулярно, чем $a_{m-1}(x)$, и как следствие этого разложение является равномерно пригодным.

Для получения неравномерно пригодного разложения разложим для малых ε функцию $f(x; \varepsilon) = \sqrt{x + \varepsilon}$. Получим

$$\begin{aligned} f(x; \varepsilon) &= \sqrt{x + \varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x} \right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \frac{\varepsilon^3}{16x^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Каждый член этого разложения, исключая первый, имеет особенность при $x=0$ и является более сингулярным, чем предыдущий. Следовательно, разложение не является равномерно пригодным. Справедливость его нарушается в окрестности $x=0$. Размеры области неравномерности могут быть оценены в некоторых случаях с помощью предположения о том, что два после-

довательных члена имеют один и тот же порядок. Для (1.6.4) это дает

$$\frac{\varepsilon}{2x} = O(1), \quad x = O(\varepsilon). \quad (1.6.5)$$

Это можно было усмотреть, вспомнив, что ряд Тейлора функции $[1 + (\varepsilon/x)]^{1/2}$ сходится только при $|\varepsilon/x|$, меньшем единицы.

В качестве второго примера неравномерно пригодного разложения рассмотрим разложение $\exp(-\varepsilon t)$ для малых ε . Эта функция имеет следующий равномерно сходящийся для всех t ряд Тейлора:

$$e^{-\varepsilon t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}. \quad (1.6.6)$$

Ясно, что функция $\exp(-\varepsilon t)$ может быть приближенно представлена конечным числом членов только в том случае, когда произведение εt мало. Поскольку ε — малая величина, сказанное означает, что $t = O(1)$. Если t имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$, то величина εt не мала, и усеченный ряд перестает быть справедливым. Например, для $t = 2\varepsilon^{-1}$ первые два члена дают для $\exp(-2)$ значение, равное -1 . Нетрудно установить, что если в приведенном выше ряде сохранить конечное число членов, то усеченный ряд может давать удовлетворительное приближение только до некоторого значения t , после которого функция $\exp(-\varepsilon t)$ и усеченный ряд отличаются друг от друга на величину, превосходящую заданный предел точности. Добавление дополнительных членов к усеченному ряду увеличит значение t , вплоть до которого усеченный ряд дает удовлетворительное приближение, до нового значения t' . Однако при $t > t'$ разность между $\exp(-\varepsilon t)$ и новым усеченным рядом вновь превзойдет заданную точность. Таким образом, для получения разложения, удовлетворительного для всех t , необходимы все члены ряда.

То обстоятельство, что асимптотические разложения по параметру не являются равномерно пригодными и перестают быть справедливыми в некоторых областях, является скорее правилом, чем исключением. Эти области, которые упоминаются иногда как *пограничные слои*, носят название *областей неравномерности*. Фридрихс [1955] обсуждал появление этих неравномерностей в различных областях математической физики в обзорной статье. Большинство методов теории возмущений было развито с целью превратить неравномерные разложения в равномерно пригодные. В гл. 2 обсуждаются источники неравномерности; в остальных главах развивается техника сведения неравномерных разложений к равномерным.

1.7. Простейшие действия над асимптотическими разложениями

Для определения приближенных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений мы предполагаем, что разложения можно подставлять в уравнения и выполнять над ними простейшие действия, такие, как сложение, вычитание, возведение в степень, интегрирование, дифференцирование и умножение. Правила действий будут выведены без обоснования, хотя некоторые из разложений расходящиеся. Условия, при которых указанные действия могут быть обоснованы, изучались Ван-дер-Корпутом [1956], Эрдейи [1956] и де Брейном [1958].

Правила сложения и вычитания могут быть обоснованы в общем случае. Если, например,

$$\begin{aligned} f(x; \varepsilon) &\sim \sum a_n(x) \varphi_n(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ g(x; \varepsilon) &\sim \sum b_n(x) \varphi_n(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

где $\varphi_n(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность, то имеем (Эрдейи [1956])

$$\alpha f(x; \varepsilon) + \beta g(x; \varepsilon) \sim \sum [\alpha a_n(x) + \beta b_n(x)] \varphi_n(\varepsilon). \quad (1.7.2)$$

Если, кроме того, $f(x; \varepsilon)$ и $a_n(x)$ — интегрируемые функции x , то

$$\int_a^x f(x; \varepsilon) dx \sim \sum \varphi_n(\varepsilon) \int_a^x a_n(x) dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.7.3)$$

Если же $f(x; \varepsilon)$ и $\varphi_n(\varepsilon)$ — интегрируемые функции ε , то

$$\int_0^\varepsilon f(x; \varepsilon) d\varepsilon \sim \sum a_n(x) \int_0^\varepsilon \varphi_n(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.7.4)$$

Правило умножения для общего случая не определяется, поскольку в формальном произведении рядов $\sum a_n(x) \varphi_n(\varepsilon)$ и $\sum b_m(x) \varphi_m(\varepsilon)$ встречаются все произведения вида $\varphi_n(\varepsilon) \varphi_m(\varepsilon)$, которые в общем случае невозможно расположить так, чтобы получить асимптотическую последовательность. Иными словами, умножение определено в тех случаях, когда в результате получается асимптотическое разложение. Это имеет место для всех асимптотических последовательностей φ_n , для которых произведения $\varphi_n \varphi_m$ либо образуют асимптотическую последовательность, либо имеют асимптотическое разложение. Важным классом таких последовательностей является набор степеней ε . Так, если при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(x; \varepsilon) &\sim \sum a_n(x) \varepsilon^n, \\ g(x; \varepsilon) &\sim \sum b_n(x) \varepsilon^n, \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$f(x; \varepsilon)g(x; \varepsilon) \sim \sum c_n(x) \varepsilon^n, \quad (1.7.6)$$

где

$$c_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m(x) b_{n-m}(x). \quad (1.7.7)$$

Возведение в степень не может быть обосновано для общего случая. Формальное проведение этой операции в том случае, когда она не обоснована, приводит к неравномерностям. Например, равенство

$$\sqrt{x+\varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} + \dots \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.8)$$

не обосновано при $\varepsilon/x = O(1)$, потому что его правая часть является неравномерным разложением в области $x = O(\varepsilon)$. Аналогично, равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + \dots \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.9)$$

не обосновано при $\varepsilon x = O(1)$, потому что правая часть его неравномерна для больших x .

В общем случае не обосновано также дифференцирование асимптотических разложений по такой переменной, как x , или по параметру возмущения ε . Так же как при возведении в степень, дифференцирование, не будучи обоснованным, ведет к неравномерностям.

Упражнения

1.1. Определить при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядок следующих выражений:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad 4\pi^2\varepsilon, \quad 1000\varepsilon^{1/2}, \quad \ln(1+\varepsilon), \quad \frac{1-\cos \varepsilon}{1+\cos \varepsilon}, \quad \frac{\varepsilon^{3/2}}{1+\sin \varepsilon}, \\ & \frac{\varepsilon^{1/2}}{1-\cos \varepsilon}, \quad \operatorname{sech}^{-1} \varepsilon, \\ & e^{\lg \varepsilon}, \quad \ln \left[1 + \frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\varepsilon(1-2\varepsilon)} \right], \quad \ln \left[1 + \frac{\ln \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon} \right], \quad e^{-\operatorname{ch}(1/\varepsilon)}, \quad \int_0^\varepsilon e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

1.2. Расположить следующие выражения в ряд по убывающему порядку при малых ε :

$$\varepsilon^2, \quad \varepsilon^{1/2}, \quad \ln(\ln \varepsilon^{-1}), \quad 1, \quad \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}, \quad e^{-1/\varepsilon}, \quad \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^{3/2}, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1}.$$

1.3. Разложить каждое из следующих выражений при малом ε , сохранив три члена:

$$(a) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4 t},$$

$$(б) (1 + \varepsilon \cos f)^{-1},$$

$$(в) (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2)^{-2},$$

$$(г) \sin(s + \varepsilon \omega_1 s + \varepsilon^2 \omega_2 s),$$

$$(д) \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon}}\right),$$

$$(e) \ln \frac{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt[3]{1 + 2\varepsilon}}.$$

1.4. Пусть $\mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2$, $h = (3/2) [1 - \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}]$. Разложить величину h при малом ε , сохранив три члена.

1.5. Найти с точностью до второго порядка решение уравнения

$$x = 1 + \varepsilon x^2, \quad \varepsilon \ll 1,$$

и сравнить его с точным решением при $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,001$.

1.6. Показать, что асимптотическое разложение функции

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

для больших x имеет вид

$$F(x) = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \dots\right) \sin x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \dots\right) \cos x.$$

Сходится ли этот ряд? Оценить остаточный член сверху и показать, что при $x \rightarrow \infty$ он стремится к нулю быстрее, чем последний член разложения.

1.7. Найти при $x=0$ два члена разложения для s , если $x = s - (\varepsilon/3s^2) - (3\varepsilon^2/10s^4)$.

1.8. Пусть $x = s + \varepsilon(2 - (2/3)s^{1/2}) + (42/5)\varepsilon^2 s^{1/2}$. Показать, что решение уравнения $dx/ds = 0$ имеет вид

$$s = \frac{1}{9}\varepsilon^2 - \frac{14}{5}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Найти затем значение x , соответствующее этой величине.

1.9. Пусть

$$y_0(s) + \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \dots = A$$

и

$$1 = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \dots$$

Показать, что

$$s = 1 - \varepsilon x_1(1) - \varepsilon^2 [x_2(1) - x_1'(1) x_1(1)] + \dots$$

и найти затем $y_0(1)$, $y_1(1)$ и $y_2(1)$.

1.10. Рассмотреть уравнение

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1.$$

- (а) Определить три члена разложения решения для малого ε .
 (б) Показать, что точное решение имеет вид

$$y = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1}.$$

- (в) Разложить это точное решение для малого ε и сравнить с результатом п. (а).
 (г) Справедливо ли это разложение для всех x ?

1.11. Для решения уравнения

$$y'' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) y = 0$$

определить разложение по координате вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n+\sigma}.$$

1.12. Определить с точностью до второго порядка (т. е. найти три члена) разложения для решений

- (а) $\ddot{u} + u = \varepsilon u^2, \quad \varepsilon \ll 1,$
 (б) $\ddot{u} + u = -\varepsilon \dot{u}$

при условиях $u(0) = a, \dot{u}(0) = 0$. Являются ли эти разложения равномерно пригодными?

1.13. Найти при малом ε разложение первого порядка (двучленное) для решения системы

$$\begin{aligned} s \frac{dx}{ds} &= x + \varepsilon y, \\ s \frac{dy}{ds} &= -(2+x)y, \quad y(1) = e^{-1}, \quad x(1) = 1. \end{aligned}$$

1.14. Используя асимптотическое разложение (1.5.13), показать, что большие нули ξ функции $J_0(x)$ являются решениями уравнения

$$\operatorname{ctg} \left(\xi - \frac{1}{4} \pi \right) = -\frac{1}{8\xi} + \frac{33}{512\xi^3} + \dots$$

и что

$$\xi = \frac{1}{4} \pi (4n+3) + \frac{1}{2\pi(4n+3)} + \dots \quad \text{при } n \text{ целом.}$$

1.15. Показать, что уравнение

$$u\ddot{u} + \dot{u} + tu = t^2$$

удовлетворяется при $t \rightarrow \infty$ разложениями (Левинсон [1969])

$$u = -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 - 9t \ln t + O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

$$u = t + (b_1 \sin t + b_2 \cos t) t^{-1/2} + O(t^{-1}),$$

где c_i и b_i — постоянные.

1.16. Показать, что уравнение Беллмана [1955]

$$(\ddot{u})^2 = \dot{u} + u$$

при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяется разложениями (Левинсон [1969])

$$u = ae^{-t} - a^2 e^{-2t} + O(e^{-3t}),$$

$$u = \frac{1}{144} t^4 + \frac{1}{30} t^3 \ln t + c_1 t^3 + c_2 t^{-2} + O(t^2 \ln^2 t),$$

где a и c_i — постоянные.

Прямые разложения и источники неравномерности

В § 1.6 было указано, что разложения типа Пуанкаре (прямые разложения), такие, как

$$f(x; \epsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\epsilon) f_m(x),$$

где $\delta_m(\epsilon)$ — асимптотическая последовательность по параметру ϵ , являются, как правило, неравномерно пригодными и нарушаются в областях, называемых областями неравномерности. Некоторыми из источников неравномерностей являются следующие: бесконечная область, малый параметр при старшей производной, изменение типа дифференциального уравнения в частных производных и наличие особенностей.

В случае бесконечной области неравномерность заявляет о себе наличием так называемых вековых членов вида $x^n \cos x$ и $x^n \sin x$, из-за которых отношение $f_m(x)/f_{m-1}(x)$ не ограничено, когда x стремится к бесконечности. В случае малого параметра при старшей производной разложение возмущения не может удовлетворить всем граничным и начальным условиям и, таким образом, является непригодным в пограничных и начальных слоях. Поскольку граничные и начальные условия, необходимые для корректной постановки задачи, зависят от типа рассматриваемого дифференциального уравнения в частных производных, то неравномерности могут возникнуть и в том случае, когда тип возмущенных уравнений отличается от типа исходного уравнения. В четвертом случае в разложении в некоторой точке могут появиться особенности, которые не имеют места в точном решении и становятся более выраженными в последующих членах.

Для каждого из источников неравномерности дается несколько примеров, иллюстрирующих возникновение неравномерных разложений и способы их распознавания. Эти примеры поясняют также технику получения возмущений по параметру. Кроме того, большинство из этих примеров вновь появляется в последующих главах, где они приводятся к равномерно пригодному виду. В заключение главы обсуждается роль координат (как зависимых, так и независимых) в получении равномерных или

неравномерных разложений, а также роль методов возмущений в выборе координатных систем, в которых разложения становятся равномерно пригодными.

2.1. Бесконечные области

2.1.1. Уравнение Дюффинга

Рассмотрим колебания массы, соединенной с нелинейной пружиной, которые описываются уравнением Дюффинга

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad (2.1.1)$$

где ε — малое положительное число. Эта задача допускает интеграл

$$\dot{u}^2 + u^2 + \varepsilon \frac{u^4}{2} = \left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{2}\right) a^2. \quad (2.1.2)$$

Из уравнения (2.1.2) следует, что при положительном ε значения u ограничены для всех моментов времени.

Будем искать приближенное решение в виде асимптотического разложения типа Пуанкаре

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(t). \quad (2.1.3)$$

Подставив его в (2.1.1), разложив по степеням ε и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим следующие задачи для определения u_0 и u_1 :

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = a, \quad \dot{u}_0(0) = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0. \quad (2.1.5)$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет для u_0 следующий вид:

$$u_0 = a \cos t. \quad (2.1.6)$$

Подставляя это значение u_0 в (2.1.5) и используя тригонометрическое тождество $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$, получим

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}. \quad (2.1.7)$$

Решением уравнения (2.1.7) с начальными условиями (2.1.5) является функция

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8} t \sin t + \frac{a^3}{32} (\cos 3t - \cos t). \quad (2.1.8)$$

Таким образом,

$$u = a \cos t + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (2.1.9)$$

Из-за наличия слагаемого $t \sin t$ имеем $u_1/u_0 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому приведенное выше двучленное разложение не является приближением к решению при $t \rightarrow \infty$. Слагаемое $t \sin t$ называется *вековым* членом; оно стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, в то время как выше мы выяснили, что u должно быть ограничено для всех t . Разложение (2.1.9) нарушается не только при бесконечном значении переменной t ; если $t = O(\varepsilon^{-1})$, то второй член сравнивается по порядку с первым в противоречие с нашим предположением при выводе (2.1.9) о том, что εu_1 является малой поправкой к u_0 . При дальнейшем вычислении членов ряда будут появляться вековые члены вида $t^n (\cos t, \sin t)$. Хотя результирующий ряд и является сходящимся, но сходимость эта медленная, и представить решение для всех t конечным числом слагаемых не удастся.

Появление вековых членов характерно для задач о нелинейных колебаниях; следовательно, в этих случаях нельзя ожидать, что прямое разложение окажется равномерно пригодным.

2.1.2. Модель слабой нелинейной неустойчивости

В качестве модели слабой нелинейной неустойчивости стоячей волны рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} - u = u^3, \quad (2.1.10)$$

$$u(x, 0) = \varepsilon \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (2.1.11)$$

Начальные условия наводят на мысль о разложении вида

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots \quad (2.1.12)$$

Подставляя это разложение в (2.1.10) и (2.1.11), получим, приравнявая коэффициенты:

при ε

$$\begin{aligned} u_{1tt} - u_{1xx} - u_1 &= 0, \\ u_1(x, 0) &= \cos kx, \quad u_{1t}(x, 0) = 0; \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

при ε^2

$$\begin{aligned} u_{2tt} - u_{2xx} - u_2 &= 0, \\ u_2(x, 0) &= u_{2t}(x, 0) = 0; \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

при ε^3

$$\begin{aligned} u_{3tt} - u_{3xx} - u_3 &= u_1^3, \\ u_3(x, 0) &= u_{3t}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Решение задачи (2.1.13) для первого порядка имеет вид

$$u_1 = \cos \sigma_1 t \cos kx, \quad \sigma_1^2 = k^2 - 1. \quad (2.1.16)$$

Таким образом, волна устойчива при $k > 1$ и неустойчива при $k < 1$. Особый случай $k = 1$ разделяет устойчивые и неустойчивые волны.

Решением задачи (2.1.14) для второго порядка является функция $u_2 = 0$. Подставляя в (2.1.15) выражение (2.1.16) для u_1 и решая задачу, получим

$$u_3 = \frac{3}{128\sigma_1^2} [12\sigma_1 t \sin \sigma_1 t + \cos \sigma_1 t - \cos 3\sigma_1 t] \cos kx + \\ + \frac{1}{128k^2} [3(\cos \sigma_1 t - \cos \mu t) + k^2(\cos 3\sigma_1 t - \cos \mu t)] \cos 3kx, \quad (2.1.17)$$

где $\mu^2 = 9k^2 - 1$. Следовательно,

$$u = \varepsilon \cos \sigma_1 t \cos kx + \varepsilon^2 \left[\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \right. \\ \left. + \text{члены, ограниченные при } t \rightarrow \infty \right]. \quad (2.1.18)$$

Здесь вновь прямое разложение нарушается при $t = O(\varepsilon^{-2})$ или при больших значениях t вследствие наличия векового члена $t \sin \sigma_1 t$.

2.1.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла

В качестве третьего примера, поясняющего ответственность бесконечной области за неравномерность в разложении типа Пуанкаре, рассмотрим равномерное невязкое сверхзвуковое обте-

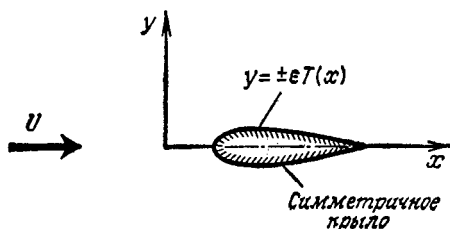


Рис. 2.1.

ание тонкого симметричного крыла, изображенного на рис.2.1. Представим вектор скорости в виде $\mathbf{q} = U \text{grad}(x + \varphi)$; потенциал φ для стационарного двумерного безвихревого изэнтропического течения удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{yy} - B^2 \varphi_{xx} = M^2 \left[\frac{\gamma - 1}{2} (2\varphi_x + \varphi_x^2 + \varphi_y^2) (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \right. \\ \left. + (2\varphi_x + \varphi_x^2) \varphi_{xx} + 2(1 + \varphi_x) \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_y^2 \varphi_{yy} \right], \quad (2.1.19)$$

где $B^2 = M^2 - 1$, M — число Маха свободного потока ¹⁾. Нормальная составляющая скорости обращается в нуль на поверхности крыла, т. е. течение на поверхности происходит по касательной. Следовательно, имеем

$$\frac{\varphi_y}{1 + \varphi_x} = \varepsilon T'(x) \text{ при } y = \varepsilon T(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1.20)$$

где l — длина хорды крыла. Граничные условия на бесконечности вверх по течению имеют вид

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (2.1.21)$$

Используя метод последовательных приближений, Ван Дайк [1952] получил для уравнения (2.1.19) с граничным условием (2.1.21) решение второго порядка при малом, но конечном ε . Будем искать разложение типа Пуанкаре, приняв в качестве параметра возмущения ε . Пусть

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots \quad (2.1.22)$$

В силу малости ε мы сможем существенно упростить задачу, перенеся граничное условие (2.1.20) с кривой $y = \varepsilon T(x)$ на отрезок $y = 0$ с помощью следующего разложения в ряд Тейлора:

$$\varphi(x, \varepsilon T) = \varphi(x, 0) + \varepsilon T \varphi_y(x, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 T^2 \varphi_{yy}(x, 0) + \dots$$

Перепишем (2.1.20) в виде

$$\frac{\varphi_y(x, 0) + \varepsilon T \varphi_{yy}(x, 0) + \dots}{1 + \varphi_x(x, 0) + \dots} = \varepsilon T'(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.1.23)$$

Подставляя (2.1.22) в (2.1.19), (2.1.21) и (2.1.23), разлагая для малого ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , будем иметь для коэффициентов:

при ε

$$\varphi_{1yy} - B^2 \varphi_{1xx} = 0, \quad (2.1.24)$$

$$\varphi_{1y}(x, 0) = T'(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1.25)$$

$$\varphi_1(x, y) = 0 \text{ (на бесконечности вверх по течению);} \quad (2.1.26)$$

при ε^2

$$\varphi_{2yy} - B^2 \varphi_{2xx} = M^2 [(\gamma + 1) \varphi_{1x} \varphi_{1xx} + (\gamma - 1) \varphi_{1x} \varphi_{1yy} + 2 \varphi_{1y} \varphi_{1xy}], \quad (2.1.27)$$

$$\varphi_{2y} = \varphi_{1x} T' - \varphi_{1yy} T \text{ при } y = 0 \text{ и } 0 \leq x \leq l, \quad (2.1.28)$$

$$\varphi_2(x, y) = 0 \text{ (на бесконечности вверх по течению).} \quad (2.1.29)$$

¹⁾ γ — показатель изэнтропы. — Прим. ред.

Общее решение уравнения (2.1.24) имеет вид

$$\varphi_1 = f(\xi) + g(\eta), \quad (2.1.30)$$

где

$$\xi = x - By, \quad \eta = x + By.$$

Из условия на бесконечности (2.1.26) следует, что $g = 0$, а условие (2.1.25) дает $f = -T(\xi)/B^1$. Поэтому

$$\varphi_1 = -T(\xi)/B. \quad (2.1.31)$$

Подстановка φ_1 в (2.1.27) дает

$$\varphi_{2yy} - B^2 \varphi_{2xx} = M^4 (\gamma + 1) f' f''. \quad (2.1.32)$$

Записав левую часть (2.1.32) в переменных ξ и η , будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{M^4 (\gamma + 1)}{4B^2} f' f''. \quad (2.1.33)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_2 = -\frac{M^4 (\gamma + 1)}{8B^2} f'^2 \eta + h(\xi). \quad (2.1.34)$$

Из (2.1.28) можно получить, что функция $h'(\xi)$ должна иметь вид

$$h'(\xi) = \frac{M^4 (\gamma + 1)}{4B^4} \xi T' T'' + \frac{1}{B^2} \left[1 - \frac{M^4 (\gamma + 1)}{8B^2} \right] T'^2 - T T''. \quad (2.1.35)$$

Поскольку осевая составляющая скорости u равна $U(1 + \varphi_x)$, имеем

$$\frac{u}{U} = 1 - \varepsilon \frac{T'}{B} + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4 (\gamma + 1)}{4B^2} \right) T'^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{M^4}{B^3} y T' T'' - T T'' \right] + O(\varepsilon^3). \quad (2.1.36)$$

Для $y = O(1)$ третий член в (2.1.36) ограничен и является поэтому малой поправкой ко второму члену, который в свою очередь при $\varepsilon \rightarrow 0$ является малой поправкой к первому члену. Однако с ростом y до значений порядка $O(\varepsilon^{-1})$ или больших третий член сравнивается по порядку со вторым и, далее, с первым членом. Это объясняется наличием слагаемого $(1/2)(\gamma + 1) M^4 B^{-3} y T' T''$, из-за которого отношение u_2/u_1 не ограничено при $y \rightarrow \infty$. Хотя в рассматриваемой задаче и не присутствуют тригонометрические функции, слагаемое это может трактоваться как вековой член.

¹⁾ Здесь строится решение в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Поток в нижней полуплоскости будет симметричен ему относительно прямой $y = 0$. — Прим. ред.

2.1.4. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса

Четвертым примером, показывающим трудность, возникающую при бесконечной области, является несжимаемое равномерное обтекание сферы при малом числе Рейнольдса. Для осесимметричного течения полная система уравнений Навье—Стокса в

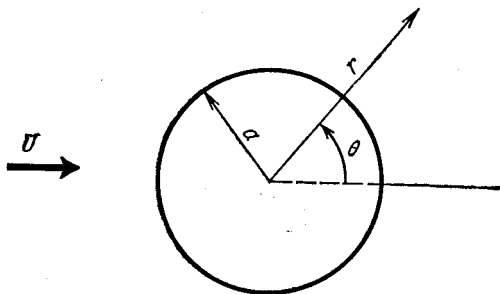


Рис. 2.2.

сферической системе координат, изображенной на рис. 2.2, задает следующее безразмерное уравнение относительно функции тока

$\psi(r, \theta)$ ($u_r = \psi_\theta / r^2 \sin \theta$, $u_\theta = -\psi_r / r \sin \theta$):

$$\mathcal{D}^4 \psi = \frac{R}{r^2 \sin \theta} \left(\psi_\theta \frac{\partial}{\partial r} - \psi_r \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta \psi_r - 2 \frac{\psi_\theta}{r} \right) \mathcal{D}^2 \psi, \quad (2.1.37)$$

где $R = Ua/\nu$ — число Рейнольдса (ν — кинематическая вязкость) и использовано обозначение

$$\mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (2.1.38)$$

Граничные условия на поверхности сферы требуют обращения в нуль скорости; в безразмерном виде будем иметь

$$\psi(1, \theta) = \psi_r(1, \theta) = 0. \quad (2.1.39)$$

Из условия равномерности потока на бесконечности имеем

$$\psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.1.40)$$

Соотношения (2.1.37) — (2.1.40) определяют корректно поставленную задачу относительно функции тока ψ .

Будем искать формальное разложение типа Пуанкаре, справедливое при малых R :

$$\psi(r, \theta; R) = \sum_{m=0}^{\infty} R^m \psi_m(r, \theta). \quad (2.1.41)$$

Подставляя (2.1.41) с учетом условия (2.1.40) в уравнение (2.1.37), разлагая при малом R и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях R , получим для коэффициентов: при R^0

$$\mathcal{D}^4 \psi_0 = 0, \quad (2.1.42)$$

$$\psi_0(1, \theta) = \psi_{0r}(1, \theta) = 0, \quad (2.1.43)$$

$$\psi_0(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty; \quad (2.1.44)$$

при R

$$\mathcal{D}^4 \psi_1 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\psi_{0\theta} \frac{\partial}{\partial r} - \psi_{0r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta \psi_{0r} - 2 \frac{\psi_{0\theta}}{r} \right) \mathcal{D}^2 \psi_0, \quad (2.1.45)$$

$$\psi_1(1, \theta) = \psi_{1r}(1, \theta) = 0, \quad (2.1.46)$$

$$\psi_1(r, \theta) = o(r^2) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.1.47)$$

Условие (2.1.44) подсказывает, что ψ_0 надо искать в виде

$$\psi_0 = f(r) \sin^2 \theta. \quad (2.1.48)$$

Подставив функцию этого предполагаемого вида в (2.1.42), получим уравнение

$$f^{IV} - \frac{4f''}{r^2} + \frac{8f'}{r^3} - \frac{8f}{r^4} = 0, \quad (2.1.49)$$

общее решение которого имеет вид

$$f = c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1}. \quad (2.1.50)$$

Из граничного условия (2.1.44) имеем $c_4 = 0$, $c_2 = 1/2$, а граничные условия (2.1.43) дают $c_1 = -3/4$, $c_{-1} = 1/4$. Окончательно имеем

$$\psi_0 = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta. \quad (2.1.51)$$

Это решение было получено Стоксом [1851].

Подставив ψ_0 вида (2.1.51) в уравнение (2.1.45), получим

$$\mathcal{D}^4 \psi_1 = -\frac{9}{4} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (2.1.52)$$

Уравнение (2.1.52) и граничные условия (2.1.46), (2.1.47) подсказывают, что частное решение будет иметь вид

$$\psi_1 = g(r) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (2.1.53)$$

Функция g должна удовлетворять следующим уравнению и граничным условиям:

$$g^{IV} - \frac{12g''}{r^2} + \frac{24g'}{r^3} = -\frac{9}{4} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right), \quad (2.1.54)$$

$$g(1) = g'(1) = 0, \quad (2.1.55)$$

$$g(r) = o(r^2) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.1.56)$$

Общее решение уравнения (2.1.54) имеет вид

$$g = b_{-2}r^{-2} + b_0 + b_3r^3 + b_5r^5 - \frac{3}{16}r^2 + \frac{9}{32}r + \frac{3}{32}\frac{1}{r}. \quad (2.1.57)$$

Из граничного условия (2.1.56) следует, что $b_3 = b_5 = 0$. Однако даже такой выбор b_3 и b_5 не обеспечивает требуемого поведения функции g при $r \rightarrow \infty$ из-за наличия члена $-(3/16)r^2$. Ясно, что никаким выбором b_0 и b_{-2} этот недостаток нельзя устранить. Более того, невозможно отыскать другое частное решение уравнения (2.1.52), которое обеспечило бы соответствующее поведение функции ψ_1 при $r \rightarrow \infty$. Граничные условия (2.1.55) требуют, чтобы $b_0 = b_{-2} = -3/32$. Следовательно,

$$\psi_1 = -\frac{3}{32} \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (2.1.58)$$

Трудность, связанная с прямым разложением, здесь вновь возникает из-за наличия бесконечной области. Двучленное разложение

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \frac{3}{32} R \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \times \\ \times \sin^2 \theta \cos \theta + O(R^2) \text{ при } R \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

удовлетворяет граничным условиям на поверхности и не удовлетворяет граничным условиям на бесконечности. Таким образом, это разложение перестает быть справедливым при больших r . Это обстоятельство носит название парадокса Уайтхеда [1889], впервые получившего это решение [1889] методом последовательных приближений и указавшего первым на его неравномерность.

2.2. Малый параметр при старшей производной

2.2.1. Пример второго порядка

Чтобы проиллюстрировать трудность, связанную с наличием малого параметра при старшей производной, рассмотрим следующий пример (Латта [1964]):

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2.1)$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b. \quad (2.2.2)$$

Здесь ε — малое положительное число. Будем искать сначала прямое разложение вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (2.2.3)$$

Подстановка в (2.2.1) и приравнивание коэффициентов при равных степенях ϵ приводит к уравнениям

$$y'_0 + y_0 = 0, \quad (2.2.4)$$

$$y'_n + y_n = -y''_{n-1}. \quad (2.2.5)$$

Нетрудно видеть, что для приближения порядка n величину y_{n-1} можно считать известной, и, следовательно, y_n для любого n задается дифференциальным уравнением первого порядка. Отсюда следует, что решения уравнений (2.2.4) и (2.2.5) не могут удовлетворить обоим граничным условиям (2.2.2), и одно из них должно быть опущено. В п. 4.1.2 показано, что должно быть опущено граничное условие в нуле. Решив уравнения для первых двух слагаемых и наложив граничное условие $y(1) = b$, получим

$$y = be^{1-x} + \epsilon be^{1-x}(1-x) + O(\epsilon^2). \quad (2.2.6)$$

Значение в нуле $y = be(1 + \epsilon)$, вообще говоря, отличается от a из (2.2.2). Следовательно, погрешность в (2.2.3) не является равномерной на $[0, 1]$ и разложение вблизи нуля нарушается.

Для понимания природы неравномерности обратимся, далее, к точному решению уравнения (2.2.1) с условиями (2.2.2):

$$y = \frac{(ae^{s_2} - b)e^{s_1 x} + (b - ae^{s_1})e^{s_2 x}}{e^{s_2} - e^{s_1}}, \quad (2.2.7)$$

где

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}. \quad (2.2.8)$$

Можно показать, что предел при фиксированном x

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(x, \epsilon) = be^{1-x} \quad (2.2.9)$$

соответствует первому члену в (2.2.6) и удовлетворяет граничному условию $y(1) = b$. Чтобы понять, что же происходит в граничной точке $x=0$, вычислим y , используя (2.2.7), с точностью порядка ϵ , обозначив эту величину через \tilde{y} . При $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$s_1 = -1 + O(\epsilon), \quad s_2 = -\frac{1}{\epsilon} + 1 + O(\epsilon). \quad (2.2.10)$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = be^{1-x} + (a - be)e^{-(x/\epsilon) + x} + O(\epsilon). \quad (2.2.11)$$

В проведенных выше вычислениях член, пропорциональный $\exp[-(x/\epsilon) + x]$, был учтен, поскольку оценка проводится

не только для случая $\varepsilon \rightarrow 0$, но также и для случая $x \rightarrow 0$. По способу построения (2.2.11) можно сделать вывод, что порядок погрешности равномерен на $[0, 1]$. На рис. 2.3 схематически показано поведение \tilde{y} и первого слагаемого из (2.2.6), которое будем обозначать \hat{y} . Видно, что \tilde{y} согласуется с \hat{y} всюду, за исключением малой окрестности нуля, в которой \hat{y} быстро меняется, чтобы удовлетворить граничному условию. Таким обра-

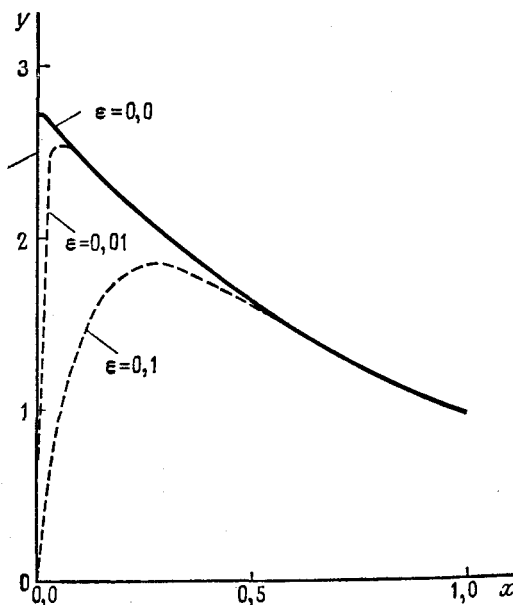


Рис. 2.3.

зом, функция $y(x; \varepsilon)$ является непрерывной при $\varepsilon > 0$ и при $\varepsilon = 0$ терпит разрыв. В самом деле, справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = a, \quad (2.2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = b\varepsilon, \quad (2.2.13)$$

которые показывают, что точное решение $y(x; \varepsilon)$ сходится к \hat{y} (первое слагаемое в (2.2.6)) неравномерно.

2.2.2. Обтекание тела при больших числах Рейнольдса

Рассмотрим двумерное вязкое несжимаемое обтекание тела поступательным потоком, показанного на рис. 2.1. Полная система уравнений Навье—Стокса для установившегося течения

определяет следующее уравнение для функции тока ψ ($u = \psi_y$, $v = -\psi_x$; u и v — компоненты скорости по осям x и y):

$$\left(\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{R} \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.2.14)$$

Здесь $R = UL/\nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематическая вязкость жидкости. Уравнение (2.2.14) нужно дополнить граничными условиями. На поверхности тела, $y = F(x)$, обращаются в нуль обе компоненты скорости; таким образом,

$$F' \psi_y [x, F(x)] + \psi_x [x, F(x)] = 0, \quad (2.2.15)$$

$$\psi [x, F(x)] = 0. \quad (2.2.16)$$

Второе условие означает обращение в нуль касательной к телу составляющей скорости (так называемое условие прилипания), в то время как первое условие означает обращение в нуль нормальной составляющей скорости. Третье условие имеет вид

$$\psi(x, y) \rightarrow y \quad (\text{на бесконечности вверх по течению}). \quad (2.2.17)$$

Пытаясь построить прямое разложение вида

$$\psi(x, y; R) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(R) \psi_m(x, y) \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (2.2.18)$$

где

$$\delta_0(R) = 1, \quad \delta_m(R) = o[\delta_{m-1}(R)] \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

мы получим следующее уравнение для первого слагаемого (невязкое течение):

$$\left(\psi_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{0x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi_0 = 0. \quad (2.2.19)$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением не четвертого, а третьего порядка. Поэтому ψ_0 не может удовлетворить всем граничным условиям (2.2.15) и условию (2.2.17); одно из них следует опустить. Поскольку при невязком течении возможно скольжение по телу, опустить следует граничное условие (2.2.16). Поэтому полученное решение для ψ_0 является при $R \rightarrow \infty$ очень хорошим приближением точного решения вдали от тела и становится несостоятельным вблизи тела. Касательная составляющая скорости должна обратиться в нуль на поверхности независимо от того, сколь мала вязкость (сколь велико число R). По этой причине при больших R точное решение близко к ψ_0 всюду, за исключением тонкого слоя около тела, в котором оно претерпевает быстрое изменение, чтобы восстановить условие прилипания. Этот тонкий слой и есть *пограничный слой Прандтля*.

2.2.3. Релаксационные колебания

Следующей задачей, которую мы рассмотрим, будет задача об отыскании периодических решений для уравнений вида

$$\varepsilon u'' = f(u', u) \quad (2.2.20)$$

при малом ε и при условии, что уравнение $f(u', u) = 0$ периодических решений не имеет. Впервые к задачам такого рода обратился Ван-дер-Поль [1927], пытаясь объяснить колебания со

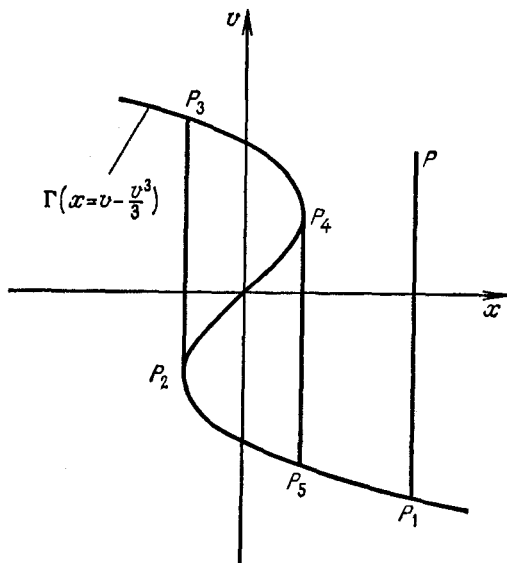


Рис. 2.4.

срывами (релаксационные колебания) в электрической цепи. Эти колебания описываются следующим уравнением, которое называют теперь уравнением Ван-дер-Поля:

$$u'' + u = \alpha \left(u' - \frac{1}{3} u'^3 \right). \quad (2.2.21)$$

Положив $v = u'$, $x = u/\alpha$ и $\varepsilon = \alpha^{-2}$, приведем (2.2.21) к виду

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = \frac{v - \frac{v^3}{3} - x}{v}. \quad (2.2.22)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем уравнение $x = v - (v^3/3)$, которое определяет кривую, показанную на рис. 2.4. Предположим, что ε очень мало, но отлично от нуля, и рассмотрим интегральную кривую, начинающуюся в точке P . Поскольку точка P находится вдали от кривой Γ , то вплоть до точки P_1 , в которой интегральная кри-

вая достигает кривой Γ , величина dv/dx равна приближенно $-\infty$. В точке P_1 имеем $dv/dx = 0$.

Поскольку вдали от кривой Γ величина dv/dx равна приближенно $\pm\infty$, то интегральная кривая стремится отслеживать кривую Γ , не отходя от нее, до тех пор пока не достигнет окрестности точки P_2 . В этой точке интегральная кривая сворачивает почти вертикально вверх до пересечения с кривой Γ в точке P_3 . Поскольку вдали от кривой Γ имеем $dv/dx \approx \pm\infty$, то интегральная кривая отслеживает по часовой стрелке кривую Γ , оставаясь над ней до некоторой окрестности точки P_4 , где она почти вертикально поворачивает вниз до пересечения с кривой Γ в точке P_5 . Затем она отслеживает путь от P_5 до P_2 . Поэтому предел периодического решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ состоит из дуг P_5P_2 и P_3P_4 кривой Γ и двух вертикальных отрезков P_4P_5 и P_2P_3 . Таким

образом, предельное решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ удовлетворяет уравнению $f(u', u) = 0$ всюду, за исключением некоторых точек, в которых функция $v = u'$ имеет скачкообразный разрыв.

2.2.4. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин

Последним примером рассматриваемого класса является несимметричный изгиб предварительно напряженной кольцевой пластины, исследованный Альцхаймером и Дэвисом [1968]. Наружная кромка пластины жестко заделана, отверстие кольца содержит твердое включение (показано на рис. 2.5). К твердому включению приложен момент, который стремится повернуть его вокруг

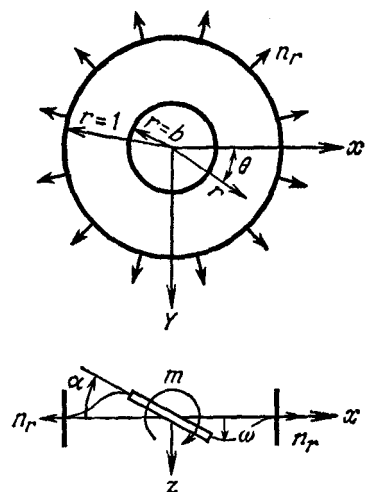


Рис. 2.5. На верхнем рисунке — вид недеформированной пластины сверху; на нижнем рисунке — деформированное состояние.

диаметра и вывести из плоскости пластины. Для тонкой кольцевой пластины без поверхностного нагружения, на которую действуют силы, направленные по плоскости пластины, Тимошенко и Войновский-Кригер [1959] вывели следующее уравнение относительно поперечного смещения ω :

$$\nabla^4 \omega = \frac{r_1^2}{D} \left[n_r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + n_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + 2n_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right]. \quad (2.2.23)$$

Здесь n_r , n_θ и $n_{r\theta}$ — силы в плоскости на единицу длины. В (2.2.23) полярный радиус и поперечное смещение приведены к безраз-

мерному виду и измеряются в единицах внешнего радиуса r_1 и толщины пластины h соответственно. Жесткость на изгиб задается формулой $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Относительно сил в плоскости пластины предположим, что они создают начальное равномерное радиальное предварительное напряжение и достаточно велики, чтобы их можно было считать постоянными величинами при последующем поперечном движении (т. е. $n_r = n_\theta$ — постоянны, $n_{r\theta} = 0$). Таким образом, уравнение (2.2.23) сводится к виду

$$\epsilon^2 \nabla^4 \omega - \nabla^2 \omega = 0, \quad (2.2.24)$$

где

$$\epsilon^2 = \frac{D}{r_1^2 n}.$$

Пользуясь рис. 2.5, можно выписать следующие граничные условия:

$$\omega = b\alpha \cos \theta, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = \alpha \cos \theta \quad \text{при} \quad r = b, \quad (2.2.25)$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1. \quad (2.2.26)$$

Здесь α предполагается настолько малым, чтобы $\sin \alpha \approx \alpha$, и $b = r_2/r_1$, где r_2 — радиус твердого включения.

Граничные условия (2.2.25) и (2.2.26) подсказывают решение вида

$$\omega = u(r) \cos \theta. \quad (2.2.27)$$

Тогда будем иметь

$$\epsilon^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) - \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = 0, \quad (2.2.28)$$

$$u(b) = b\alpha, \quad \frac{du}{dr}(b) = \alpha, \quad (2.2.29)$$

$$u(1) = 0, \quad \frac{du}{dr}(1) = 0. \quad (2.2.30)$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.2.28) сводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad (2.2.31)$$

который представляет собой уравнение второго порядка. Поэтому его решения не могут удовлетворить четырем граничным усло-

виям (2.2.29) и (2.2.30), и, следовательно, два из них должны быть опущены. Пытаясь построить прямое разложение вида

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(r), \quad (2.2.32)$$

мы обнаружим, что каждое u_n удовлетворяет уравнению (2.2.31). Следовательно, разложение (2.2.32) не является пригодным для всех r из отрезка $[b, 1]$. В п. 4.1.5 с помощью метода сращения асимптотических разложений получено равномерно пригодное разложение.

2.3. Изменение типа дифференциального уравнения в частных производных

В зависимости от типа дифференциального уравнения в частных производных для корректной постановки задачи требуются те или иные граничные и начальные условия. Если исходное уравнение при нулевом значении малого параметра меняет свой тип, становясь, скажем, из эллиптического параболическим или гиперболическим, то могут возникнуть трудности. Этот класс задач можно рассматривать как подкласс задач, которые обсуждались в п. 2.2.1—2.2.4. Ниже мы опишем два примера, а также трудности, которые возникают при разложении в одном из них.

2.3.1. Простой пример

Рассмотрим следующую задачу Дирихле относительно функции $\varphi(x, y, \varepsilon)$:

$$\varphi_{xx} + \varepsilon \varphi_{yy} - \varphi_y = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (2.3.1)$$

$$\varphi(0, y) = a(y), \quad (2.3.2)$$

$$\varphi(x, 0) = b(x), \quad (2.3.3)$$

$$\varphi(1, y) = c(y), \quad (2.3.4)$$

$$\varphi(x, 1) = d(x). \quad (2.3.5)$$

При $\varepsilon > 0$ эта задача является корректно поставленной и допускает единственное решение. Однако при $\varepsilon = 0$ (2.3.1) сведется к уравнению

$$\varphi_{xx} - \varphi_y = 0, \quad (2.3.6)$$

которое является параболическим (уравнением диффузии). Решение уравнения (2.3.6), вообще говоря, не может удовлетворить всем граничным условиям (2.3.2)—(2.3.5), и одно из них должно быть опущено. Из рассмотрений п. 4.1.2 следует, что нужно опустить условие (2.3.5), и тогда полученное решение окажется

непригодным вблизи $y = 1$. Можно предположить, что при малом ε решение редуцированного уравнения близко к точному решению всюду, за исключением узкой области возле $y = 1$, в которой последнее быстро меняется и успевает удовлетворить опущенному граничному условию.

Следует отметить, что сингулярная природа задачи зависит не только от изменения типа уравнения, но также и от заданной области, в которой получено решение. Хотя решение уравнения (2.3.1) в области $0 \leq x, y \leq 1$ и не стремится равномерно к решению уравнения (2.3.6), в верхней полуплоскости решение (2.3.1) равномерно стремится к решению (2.3.6).

Далее рассмотрен пример, в котором изменение типа уравнения не приводит к неравномерностям.

2.3.2. Длинные волны на поверхности жидкости, стекающей по наклонной плоскости

В этом пункте мы рассмотрим различные характеристики волн на поверхности жидкой пленки, стекающей вниз по наклонной плоскости (рис. 2.6). Этот довольно сложный пример рассмат-

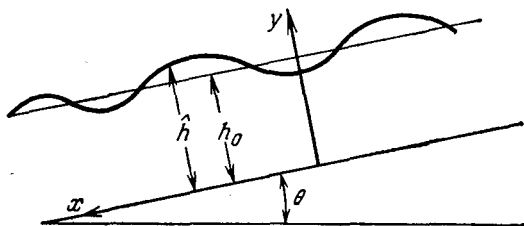


Рис. 2.6.

ривается здесь потому, что он иллюстрирует общую методику для длинных нелинейных диспергирующих волн. Течение описывается уравнениями Навье—Стокса

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + g \sin \theta + \nu \nabla^2 \hat{u}, \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} - g \cos \theta + \nu \nabla^2 \hat{v}. \quad (2.3.9)$$

Здесь \hat{u} и \hat{v} — компоненты скорости по направлениям x и y , \hat{p} — давление жидкости, \hat{t} — время, ρ и ν — плотность жидкости и кинематическая вязкость соответственно. На поверхности раздела

жидкость — твердое тело обе компоненты скорости исчезают, т. е.

$$\hat{u} = \hat{v} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{y} = 0. \quad (2.3.10)$$

Если поверхность жидкости гладкая (т. е. волны отсутствуют), то существует следующее ламинарное установившееся решение:

$$\hat{U} = \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2h_0 \hat{y} - \hat{y}^2), \quad \hat{V} = 0, \quad (2.3.11)$$

$$\hat{P} = \hat{p}_0 - \rho g \cos \theta (\hat{y} - h_0).$$

В этом решении использовано граничное условие $\partial \hat{u} / \partial \hat{y} = 0$ при $\hat{y} = h_0$ (т. е. сдвиг отсутствует).

Далее мы рассмотрим возмущения в этой картине установившегося течения. Введем безразмерные величины следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha &= h_0/l, \quad h = \hat{h}/h_0, \quad y = \hat{y}/h_0, \quad x = \hat{x}/l, \\ U &= \hat{U}/U_L, \quad u + U = \hat{u}/U_L, \quad v = \hat{v}/\alpha U_L, \\ t &= \hat{t}U_L/l, \quad P = \hat{P}/\rho g h_0 \sin \theta, \quad p + P = \hat{p}/\rho g h_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Здесь $U_L = gh_0^2 \sin \theta / 2\nu$, l — характерная длина волн, α — безразмерная величина, количественно описывающая глубину жидкости. Подставив (2.3.12) в уравнения (2.3.7) — (2.3.9) и используя (2.3.11), получим следующие уравнения для безразмерных возмущений:

$$u_x + v_y = 0, \quad (2.3.13)$$

$$u_t + (u + U)u_x + v(u_y + U') = -\frac{2p_x}{R} + \frac{1}{\alpha R}(u_{yy} + \alpha^2 u_{xx}), \quad (2.3.14)$$

$$v_t + (u + U)v_x + uv_y = -\frac{2}{R\alpha^2}p_y + \frac{1}{\alpha R}(v_{yy} + \alpha^2 v_{xx}), \quad (2.3.15)$$

где $R = U_L h_0 / \nu$ — число Рейнольдса жидкой пленки, $U = 2y - y^2$, а штрих означает дифференцирование по y .

Уравнение (2.3.13) может быть решено введением функции тока $\psi(x, y, t)$, такой, что

$$(u, v) = (\psi_y, -\psi_x).$$

Тогда уравнения (2.3.14) и (2.3.15) можно будет объединить соотношением

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} &= \alpha R [\psi_{yyt} + (U + \psi_y) \psi_{xyy} - (U'' + \psi_{yyy}) \psi_x] - 2\alpha^2 \psi_{xxyy} + \\ &+ \alpha^3 R [\psi_{xxt} + (U + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy}] - \alpha^4 \psi_{xxxx}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Уравнение (2.3.16) должно быть дополнено граничными условиями. Из (2.3.10) имеем условие на поверхности раздела твер-

дое тело — жидкость

$$\psi_y(x, 0, t) = \psi(x, 0, t) = 0. \quad (2.3.17)$$

На свободной поверхности нормальная составляющая скорости жидкости равна скорости самой поверхности раздела, т. е.

$$h_t + (U + \psi_y)h_x + \psi_x = 0 \quad \text{при } y = h(x). \quad (2.3.18)$$

Кроме того, условие отсутствия касательного напряжения на свободной поверхности дает

$$(U' + \psi_{yy} - \alpha^2 \psi_{xx})(1 - \alpha^2 h_x^2) - 4\alpha^2 \psi_{xy} h_x = 0 \quad \text{при } y = h. \quad (2.3.19)$$

Наконец, из непрерывности нормального напряжения на этой свободной поверхности следует

$$\begin{aligned} -p + (h-1) \operatorname{ctg} \theta - \frac{Th_{xx} \operatorname{cosec} \theta}{(1 + \alpha^2 h_x^2)^{3/2}} - 2\alpha \frac{(\psi_{yy} - \alpha^2 \psi_{xx})h_x}{1 + \alpha^2 h_x^2} - \\ - 2\alpha \psi_{xy} \frac{1 - \alpha^2 h_x^2}{1 + \alpha^2 h_x^2} = 0 \quad \text{при } y = h. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Здесь p_x , согласно (2.3.14), имеет вид

$$p_x = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \psi_{yyy} - \frac{1}{2} R [\psi_{yt} + (U + \psi_y) \psi_{xy} - (U' + \psi_{yy}) \psi_x] + \frac{1}{2} \alpha \psi_{xxy} \quad (2.3.21)$$

и принято обозначение

$$T = \frac{\sigma}{\rho g l^2},$$

где σ — поверхностное натяжение жидкости.

При выводе уравнения, описывающего безразмерное изменение возмущенной поверхности, мы будем следовать Бенни [1965a]¹⁾: сначала найдем разложение по степеням α для возмущенного решения задачи (2.3.16), (2.3.17), (2.3.19)–(2.3.21) и затем подставим это разложение для ψ в (2.3.18). Итак, положим в предыдущих уравнениях

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \alpha \psi_1 + \dots, \\ p &= \alpha^{-1} p_{-1} + p_0 + \alpha p_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях α . Получим, приравнявая члены:

¹⁾ Волны в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по вертикальной стенке, были впервые исследованы П. Л. Капицей в 1948–1949 гг. Асимптотический анализ волн в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости был проведен Ю. П. Иванильевым [1961]. См. обзорную статью Н. Н. Моисеева [1967]. — Прим. ред.

порядка α^0

$$\psi_{0yyyy} = 0, \quad (2.3.23)$$

$$\psi_0 = \psi_{0y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (2.3.24)$$

$$\psi_{0yy} = 2(y-1) \quad \text{при } y = h, \quad (2.3.25)$$

$$\psi_{0yyy} = 0 \quad \text{при } y = h; \quad (2.3.26)$$

порядка α

$$\psi_{1yyyy} = R [\psi_{0yyt} + (U + \psi_{0y}) \psi_{0xyy} - (U'' + \psi_{0yyy}) \psi_{0x}], \quad (2.3.27)$$

$$\psi_1 = \psi_{1y} = 0, \quad \text{при } y = 0, \quad (2.3.28)$$

$$\psi_{1yy} = 0 \quad \text{при } y = h, \quad (2.3.29)$$

$$p_0 = (h-1) \operatorname{ctg} \theta - T \operatorname{cosec} \theta h_{xx} \quad \text{при } y = h, \quad (2.3.30)$$

причем

$$p_{0x} = \frac{1}{2} \psi_{1yyy} - \frac{1}{2} R [\psi_{0yt} + (U + \psi_{0y}) \psi_{0xy} - (U' + \psi_{0yy}) \psi_{0x}]. \quad (2.3.31)$$

Решение задачи (2.3.23)–(2.3.26) имеет вид

$$\psi_0 = (h-1) y^2. \quad (2.3.32)$$

Тогда уравнение (2.3.27) примет вид

$$\psi_{1yyyy} = 2R (h_t + 2hh_{xy})$$

и при условии (2.3.28) будет иметь своим решением функцию

$$\psi_1 = A(x, t) y^2 + B(x, t) y^3 + \frac{R}{12} \left(h_t y^4 + \frac{2}{5} h h_x y^5 \right). \quad (2.3.33)$$

Подставив ψ_1 в (2.3.29)–(2.3.31) и решив полученные уравнения относительно A и B , будем иметь

$$B = \frac{1}{3} (h_x \operatorname{ctg} \theta - T \operatorname{cosec} \theta h_{xxx}), \quad (2.3.34)$$

$$A = -h (h_x \operatorname{ctg} \theta - T \operatorname{cosec} \theta h_{xxx}) - \frac{1}{2} R h^2 \left(h_t + \frac{2}{3} h^2 h_x \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} [\psi(x, y, t) |_{y=h}] = (\psi_y h_x + \psi_x) |_{y=h},$$

то (2.3.18) можно переписать в виде

$$h_t + (2h - h^2) h_x + \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x, y, t) |_{y=h}] = 0. \quad (2.3.35)$$

Подставив $\psi = \psi_0 + O(\alpha)$ в это уравнение, будем иметь

$$h_t + 2h^2 h_x = 0. \quad (2.3.36)$$

Тогда

$$\psi_1(x, h, t) = -\frac{2}{3} h^3 (h_x \operatorname{ctg} \theta - T \operatorname{cosec} \theta h_{xxx}) + \frac{8}{15} R h^5 h_x.$$

Положив в (2.3.35) $\psi = \psi_0 + \alpha \psi_1 + O(\alpha^2)$, получим

$$h_t + 2h^2 h_x + \alpha \left[-\frac{2}{3} h^3 \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{4}{5} R h^3 \right) h_{xx} + \frac{2}{3} \operatorname{cosec} \theta h^3 h_{xxx} - \right. \\ \left. - 2h^2 \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{8}{5} R h^3 \right) h_x^2 + 2T \operatorname{cosec} \theta h^2 h_x h_{xxx} \right] + O(\alpha^2) = 0. \quad (2.3.37)$$

Резюмируем проделанное в этом пункте. Начав с эллиптического уравнения (2.3.16), мы заменили его уравнениями (2.3.23) и (2.3.27), которые, очевидно, не являются эллиптическими. От этих уравнений возмущения мы пришли к уравнению (2.3.37), которое явно гиперболическое. Таким образом, изменение типа уравнения не привело к возникновению неравномерностей, поскольку рассматриваемая область была неограниченной.

2.4. Наличие особенностей

В данном классе задач разложения в рассматриваемой области имеют особенности, которые не содержатся в точном решении. Более того, в членах высших порядков особенности не только сохраняются, но и становятся более выраженными.

2.4.1. Сдвиг особенности

В качестве первого примера указанного класса рассмотрим задачу, изучавшуюся Лайтхиллом [1949a]:

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x) y = 0, \quad y(1) = e^{-1}. \quad (2.4.1)$$

Это уравнение имеет особенность на прямой $x = -\varepsilon y$. Граничное условие, однако, обеспечивает положительность точного решения $y(x)$ для $x \geq 0$; следовательно, $y(x)$ не имеет особенностей при $0 \leq x < \infty$.

Для отыскания прямого разложения положим

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (2.4.2)$$

Подстановка (2.4.2) в (2.4.1), разложение по степеням ε и приравнивание коэффициентов при ε^0 и ε даст нам

$$x \frac{dy_0}{dx} + (2 + x) y_0 = 0, \quad y_0(1) = e^{-1}, \quad (2.4.3)$$

$$x \frac{dy_1}{dx} + (2 + x) y_1 = -y_0 \frac{dy_0}{dx}, \quad y_1(1) = 0. \quad (2.4.4)$$

Решение задачи нулевого порядка имеет вид

$$y_0 = x^{-2} e^{-x}. \quad (2.4.5)$$

Подставив y_0 в (2.4.4) и решив полученное уравнение, будем иметь

$$y_1 = x^{-2} e^{-x} \int_1^x e^{-t} t^{-3} (1 + 2t^{-1}) dt. \quad (2.4.6)$$

При $x \rightarrow 0$ имеем $y_0 = O(x^{-2})$, в то время как $y_1 = O(x^{-5})$. Таким образом, хотя и точное решение не имеет особенности при $x=0$, решение нулевого порядка имеет особенность в точке $x=0$, и эта особенность далее становится сильней.

2.4.2. Задача о космическом корабле Земля — Луна

Далее мы рассмотрим движение космического корабля массы m в гравитационном поле двух фиксированных притягивающих центров. Масса M_e Земли много больше массы M_m Луны. В де-

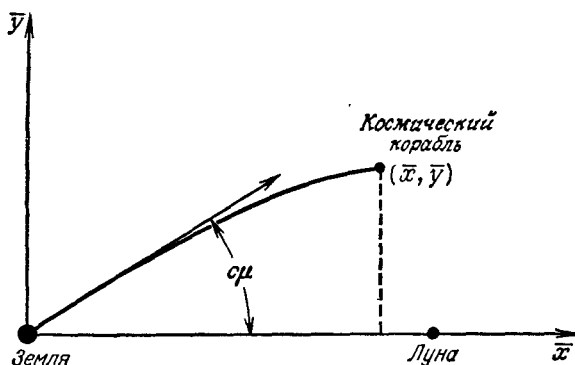


Рис. 2.7.

картовой прямоугольной системе координат, показанной на рис. 2.7, безразмерные уравнения движения имеют вид¹⁾

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -(1-\mu) \frac{x}{r_e^3} - \mu \frac{x-1}{r_m^3}, \quad (2.4.7)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -(1-\mu) \frac{y}{r_e^3} - \mu \frac{y}{r_m^3}, \quad (2.4.8)$$

$$r_e^2 = x^2 + y^2, \quad r_m^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad (2.4.9)$$

где

$$\mu = M_m / (M_m + M_e).$$

¹⁾ Уравнения (2.4.7) и (2.4.8) справедливы при условии, что притягивающие центры неподвижны. При рассмотрении движения точки в поле притяжения Земли и Луны необходимо учитывать, что система координат xy вращается вместе с Землей и Луной. Это приводит к появлению в уравнениях (2.4.7), (2.4.8) дополнительных членов, обусловленных переносными и кориолисовыми силами инерции. — Прим. ред.

Для введения безразмерных расстояния и времени использованы соответственно расстояние d между притягивающими центрами и величина

$$\left[\frac{d^3}{G(M_m + M_e)} \right]^{1/2},$$

где G — постоянная всемирного тяготения. Лагерстром и Кеворкян [1966б] изучали эту задачу при начальных условиях

$$x=0, \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx} = -\mu c \text{ при } t=0, \quad (2.4.10)$$

$$h = -\rho^2, \quad \rho \neq 1, \quad (2.4.11)$$

где h — полная энергия корабля.

Поменяв ролями x и t , рассмотрим следующие прямые разложения для малого μ :

$$t = t_0(x) + \mu t_1(x) + \dots, \quad (2.4.12)$$

$$y = \mu y_1 + \dots \quad (2.4.13)$$

Подстановка (2.4.12) и (2.4.13) в (2.4.7) — (2.4.9) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях μ дают

$$\frac{t_0''}{t_0'^3} = \frac{1}{x^2}, \quad (2.4.14)$$

$$-\frac{t_1''}{t_0'^3} + 3 \frac{t_0'' t_1'}{t_0'^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (2.4.15)$$

$$\frac{y_1''}{t_0'^2} - \frac{t_0''}{t_0'^3} y_1' + \frac{y_1}{x^2} = 0. \quad (2.4.16)$$

Решения этих уравнений при начальных условиях (2.4.10) и (2.4.11) имеют вид

$$\sqrt{2} t_0 = \frac{1}{\rho^3} \arcsin \rho \sqrt{x} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{x(1-\rho^2 x)}, \quad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} t_1 = & -\frac{2}{\rho^3} \arcsin \rho \sqrt{x} + \frac{2-\rho^2}{\rho^2(1-\rho^2)} \sqrt{\frac{x}{1-\rho^2 x}} - \frac{1}{2(1-\rho^2)^{3/2}} \times \\ & \times \ln \frac{1+(1-2\rho^2)x+2[(1-\rho^2)(1-\rho^2 x)x]^{1/2}}{1-x}, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

$$y_1 = -cx. \quad (2.4.19)$$

Таким образом, приведенное выше разложение при $x \rightarrow 1$ нарушается, поскольку t_1 имеет логарифмическую особенность. Можно показать, что в высших приближениях особенности в окрестности $x=1$ усиливаются. В самом деле,

$$t_2 = O[(1-x)^{-1}] \text{ при } x \rightarrow 1. \quad (2.4.20)$$

2.4.3. Термоупругие поверхностные волны

Рассмотрим влияние теплопроводности на распространение волн по поверхности изотропного упругого полупространства. Вместо закона теплопроводности Фурье будем использовать модифицированный закон Максвелла, чтобы учесть то малое время, которое необходимо для установления стационарной теплопроводности после внезапного возникновения градиента температуры в твердом теле. Будем предполагать, таким образом, что поток тепла h определяется соотношением

$$\tau_0 \frac{\partial h}{\partial t} + h = -k \operatorname{grad} \theta. \quad (2.4.21)$$

Здесь θ означает изменение исходной абсолютной температуры θ_0 , k — коэффициент теплопроводности, τ_0 — время термической релаксации. В уравнении (2.4.21) предполагается, что тепловые сигналы распространяются не мгновенно, а имеют конечную скорость распространения. В наших рассмотрениях здесь мы будем следовать Найфэ и Неммат-Нассеру [1971].

Поскольку материал предполагается изотропным, мы будем рассматривать двумерное движение в плоскости (x, y) , обозначая смещения соответственно через u и v . Ось x лежит на свободной поверхности, а ось y перпендикулярна к ней и направлена внутрь тела. Пусть $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, где λ и μ — коэффициенты упругости Ламе, пусть $b = [2 + (3\lambda/\mu)] \alpha \theta_0$, где α — коэффициент линейного теплового расширения, и пусть $g = \alpha (3\lambda + 2\mu)/\rho c_v$, где ρ — плотность материала, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Тогда совместные уравнения теории упругости и теплопроводности запишутся в виде

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.4.22)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (2.4.23)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = g \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + g \tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right). \quad (2.4.24)$$

В приведенных уравнениях для введения безразмерных времени и длины использованы соответственно величины $1/\omega^*$ и v_p/ω^* , где

$$\omega^* = \frac{\rho c_v v_p^2}{k}, \quad v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (2.4.25)$$

На свободной поверхности обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения и градиент температуры, т. е. имеем

при $y=0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.4.26)$$

$$(\beta^2 - 2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} - b\theta = 0, \quad (2.4.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (2.4.28)$$

Решение задачи (2.4.22) — (2.4.28) будем искать в виде

$$(u, v, \theta) = (a_1, a_2, a_3) \exp(-\alpha y + i\omega t + iqx), \quad (2.4.29)$$

где α имеет положительную вещественную часть. Тогда волновая скорость будет задаваться равенством $c = \omega / \operatorname{Re} q$, а коэффициент затухания — равенством $s = \operatorname{Im} q$. Подстановка (2.4.9) в (2.4.22) — (2.4.25) и приравнивание нулю определителя линейной системы уравнений относительно a_k дают следующие три решения для α , выраженные через q и ω :

$$\alpha_1^2 = q^2 - \beta^2 \omega^2, \quad (2.4.30)$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 2q^2 - \tau \omega^2 - \omega^2 (1 + \tau \epsilon) + i\omega (1 + \epsilon), \quad (2.4.31)$$

$$\alpha_2^2 \alpha_3^2 = \omega^4 \tau - \omega^2 q^2 - i\omega^3 + i\omega q^2 (1 + \epsilon) + q^4 - q^2 \omega^2 \tau (1 + \epsilon). \quad (2.4.32)$$

Здесь принято обозначение $\epsilon = bg/\beta^2$. Для каждого α существует собственный вектор вида

$$\left[1, i \frac{\alpha_k}{q}, i \frac{\beta^2 (q^2 - \omega^2 - \alpha_k^2)}{bq} \right] a_{1k} \text{ для } k=2, 3 \quad (2.4.33)$$

и вида

$$\left(1, i \frac{\alpha_1 q}{q^2 - \beta^2 \omega^2}, 0 \right) a_{11} \text{ для } k=1. \quad (2.4.34)$$

Подставим собственные функции, соответствующие собственным векторам (2.4.33) и (2.4.34), в уравнения (2.4.26) — (2.4.28) и приравняем нулю определитель системы уравнений относительно a_{1k} . Устремляя $\omega \rightarrow \infty$, получаем

$$G(c^2) = \frac{A^2 [2 - c^2 - c^2 \tau (1 + \epsilon) + 2A]}{[1 - c^2 \tau (1 + \epsilon) + A]^2}, \quad (2.4.35)$$

где

$$A^2 = (1 - c^2)(1 - c^2 \tau) - c^2 \tau \epsilon, \quad G(c^2) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 c^2\right)^4}{1 - \beta^2 c^2}. \quad (2.4.36)$$

Положив в (2.4.35) и (2.4.36) $\epsilon = 0$, можно получить классическую скорость волн Рэлея. При $\beta^2 = 3$ (соответствует коэф-

фициенту Пуассона $1/4$) имеем $c^2 = 0,2817$. Для малого ϵ можно попытаться построить такое разложение для c^2 , первый член которого совпадает с решением Рэлея. Итак, положим

$$c^2 = c_R^2 (1 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots). \quad (2.4.37)$$

Подставив (2.4.37) в (2.4.35) и (2.4.36), разложив по степеням ϵ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях, получим

$$c_1 = - \frac{\tau c_R^2 \left[1 - \frac{1 - c_R^2}{F} \right]}{(1 - \tau c_R^2) \left[1 + \frac{dG}{dc^2} (c_R^2) \right]}, \quad (2.4.38)$$

где

$$F = 2 - c_R^2 (1 + \tau) + 2 \sqrt{(1 - c_R^2)(1 - \tau c_R^2)}. \quad (2.4.39)$$

Из равенства (2.4.38) видно, что при значениях τ , близких к c_R^{-2} , коэффициент c_1 становится неограниченным, и разложение (2.4.37) нарушается. Можно показать, что при $\tau = c_R^{-2}$ высшие приближения более сингулярны, чем второй член.

При $\tau > c_R^{-2}$ разложение (2.4.37) следует модифицировать; в противном случае величина A^2 окажется отрицательной, а в силу (2.4.32) станет отрицательной действительная часть одного из слагаемых, составляющих α . Модифицированное разложение имеет вид

$$c^2 = \frac{1}{\tau} (1 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots). \quad (2.4.40)$$

Функции c_1 и c_2 можно определить, подставив (2.4.40) в (2.4.35) и приравняв коэффициенты при ϵ и ϵ^2 в обеих частях. Проделав это, получим

$$c_1 = - \frac{\tau}{\tau - 1}, \quad c_2 = - \frac{\tau^3}{(1 - \tau)^3} - \frac{\tau}{\tau - 1} M^2, \quad (2.4.41)$$

где M является корнем уравнения

$$\left[G^{-1}(\tau^{-1}) + \frac{\tau}{1 - \tau} \right] M^2 - \frac{2\tau^2}{(1 - \tau)^2} M + \frac{\tau}{1 - \tau} = 0. \quad (2.4.42)$$

Разложение (2.4.40) является особенным при $\tau = c_R^{-2}$, поскольку в этой точке коэффициент при M^2 обращается в нуль. Можно показать, что в высшем приближении эта особенность усложняется. Таким образом, первое из вышеприведенных разложений справедливо при $\tau < c_R^{-2}$, второе — при $\tau > c_R^{-2}$; оба разложения нарушаются вблизи $\tau = c_R^{-2}$. Разложение, пригодное в окрестности этой особенности, построено в п. 4.1.6 с помощью метода сращения асимптотических разложений.

2.4.4. Задача с точкой возврата

В качестве последнего примера рассмотрим асимптотические разложения решений уравнения

$$y'' + \lambda^2 (1 - x^2) y = 0 \quad (2.4.43)$$

при больших λ . В области $|x| < 1$ решения этого уравнения имеют колебательный характер, а при $|x| > 1$ — экспоненциальный. Это обстоятельство наводит на мысль о разложении вида

$$y = e^{\lambda \varphi(x; \lambda)}, \quad (2.4.44)$$

где

$$\varphi = \varphi_0(x) + \lambda^{-1} \varphi_1(x) + \dots \quad (2.4.45)$$

Подставив это разложение в (2.4.43) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\varphi_0'^2 = -(1 - x^2), \quad (2.4.46)$$

$$2\varphi_0' \varphi_1' + \varphi_0'' = 0. \quad (2.4.47)$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$\varphi_0 = \begin{cases} \pm i \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau & \text{при } |x| < 1, \\ \pm \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad (2.4.48)$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} \ln \varphi_0' + \text{const.} \quad (2.4.49)$$

Следовательно,

$$y = \frac{1}{(1 - x^2)^{1/4}} \left[a_1 \cos \left(\lambda \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau \right) + b_1 \sin \left(\lambda \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau \right) \right] \quad \text{при } |x| < 1 \quad (2.4.50)$$

и

$$y = \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/4}} \left[a_2 \exp \left(\lambda \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau \right) + b_2 \exp \left(-\lambda \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau \right) \right] \quad \text{при } |x| > 1, \quad (2.4.51)$$

где a_i и b_i — постоянные.

Разложения (2.4.50) и (2.4.51) называются приближениями Лиувилля—Грина или ВКБ-приближениями (п. 7.1.3). Эти разложения имеют особенность при $x = \pm 1$ и поэтому не являются равномерно пригодными. Точки $x = \pm 1$ называются *точками воз-*

врата. Неравномерность в этом примере возникла вследствие того, что решения представлены в элементарных функциях, а именно в экспоненциальных и тригонометрических функциях. Из разложений видно, что при переходе через значения $|x|=1$ характер решения меняется с колебательного на экспоненциальный. Следовательно, для представления решений нужны функции, имеющие аналогичное качественное поведение. Подходящими для этой цели являются функции Эйри (п. 7.3.1).

2.5. Роль координатных систем

При получении возмущения по параметру для некоторой величины $u(x; \epsilon)$ мы сначала выбираем независимую переменную, которая не обязательно совпадает с физической независимой переменной x , а является некоторой функцией ζ от x и малого параметра ϵ . Затем мы полагаем

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\epsilon) u_m[\zeta(x; \epsilon)] \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.5.1)$$

где $\delta_m(\epsilon)$ — асимптотическая последовательность. Мы подставляем это разложение в рассматриваемые уравнения, полагая ζ фиксированным, проводим разложение при малом ϵ и затем приравниваем нулю коэффициент при каждом δ_m . Таким образом,

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{u}{\delta_0(\epsilon)} \right], \\ &\quad \zeta \text{ фиксировано} \\ u_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{u - \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m(\epsilon) u_m(\zeta)}{\delta_n(\epsilon)} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Очевидно, что при заданной последовательности δ_n величины u_m зависят от выбора $\zeta(x; \epsilon)$.

При одном выборе ζ получаются неравномерные разложения, при другом — равномерные разложения. Например, положив в (2.1.1) $\zeta = t$, мы получили неравномерное разложение

$$u(t; \epsilon) = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\epsilon^2) \quad (2.5.3)$$

для уравнения Дюффинга (п. 2.1.1). Если бы мы выбрали $\zeta = [1 + (3/8)\epsilon a^2]t$, то получили бы разложение

$$u(t; \epsilon) = a \cos \zeta + \frac{\epsilon a^3}{32} [\cos 3\zeta - \cos \zeta] + O(\epsilon^2), \quad (2.5.4)$$

которое является равномерно пригодным. Координаты типа $\zeta = [1 + (3/8)\epsilon a^2]t$, которые приводят к равномерным разложениям, называются *оптимальными координатами* (Каплун [1954]).

В качестве второго примера рассмотрим модельную задачу о слабой нелинейной неустойчивости из п. 2.1.2. Равенство (2.1.18) задает следующее разложение:

$$u = \epsilon \cos \sigma_1 t \cos kx + \epsilon^3 \left[\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{члены, ограниченные при } t \rightarrow \infty \right]. \quad (2.5.5)$$

Это неравномерное разложение соответствует выбору $\zeta = t$. Если бы мы выбрали $\zeta = \sigma_1 [1 - (9/32\sigma_1^2)]t$, то получили бы разложение

$$u = \epsilon \cos \zeta \cos kx + O(\epsilon^3), \quad (2.5.6)$$

равномерно пригодное при всех t . Следовательно, в последнем случае ζ — оптимальная координата.

В качестве третьего примера рассмотрим сверхзвуковое обтекание тонкого крыла (п. 2.1.3). Равенство (2.1.36) задает следующее разложение для осевой составляющей скорости:

$$\frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2 - \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{M^4}{B^3} y T' T'' - T T'' \right] + O(\epsilon^3), \quad (2.5.7)$$

где $T = T(x - By)$, $y = \epsilon T(x)$ (форма крыла).

Это разложение получено при фиксированных x и y . Считая фиксированными переменные

$$\xi = y \text{ и } x - By = \zeta - \epsilon \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{B^2} \xi T'(\zeta), \quad (2.5.8)$$

мы бы получили разложение

$$\frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'(\zeta)}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2 - T T'' \right] + O(\epsilon^3), \quad (2.5.9)$$

которое является равномерно пригодным. Следовательно, (2.5.8) — оптимальные координаты.

Следует отметить, что координата может оказаться оптимальной для точности порядка $O(\epsilon)$, но не оптимальной для $O(\epsilon^2)$. Например,

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right) t \quad (2.5.10)$$

является оптимальной координатой для уравнения Дюффинга при точности $O(\epsilon)$, в то время как для высших порядков она

не является оптимальной. Однако

$$\xi = \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 - \frac{15}{256} \varepsilon^2 a^4\right) t \quad (2.5.11)$$

является оптимальной для (2.1.1) при точности $O(\varepsilon^2)$.

Поскольку большинство прямых разложений теории возмущений (полученных при фиксированных физических координатах) является неравномерным, были развиты методы превращения этих разложений в равномерно пригодные. В методе координатных преобразований (гл. 3) некоторые из этих разложений приводятся к равномерно пригодному виду с помощью определения оптимальных координат как почти тождественных преобразований.

В некоторых из рассмотренных задач, например в задаче (2.2.1) и (2.2.2), равномерно пригодное разложение (заданное соотношением (2.2.11)) имеет вид

$$y = b \exp(1-x) + (a-be) \exp\left(x - \frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.5.12)$$

Это разложение нельзя получить, считая фиксированным x или x/ε . При фиксированном x мы бы получили разложение

$$y = b \exp(1-x) + O(\varepsilon), \quad (2.5.13)$$

которое нарушается в окрестности $x=0$, ибо, вообще говоря, $y(0) = a \neq be$. Зафиксировав, однако, x/ε , мы бы пришли к разложению

$$y = be + (a-be) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.5.14)$$

неравномерная пригодность которого следует из соотношений $y(1) = b \neq be$. Таким образом, решение представлено двумя различными разложениями, использующими координаты (масштабы) x и x/ε . Поскольку эти разложения являются различными асимптотическими представлениями одной и той же функции, они могут быть соотнесены друг другу с помощью так называемого принципа сращивания (гл. 4). Из сказанного следует, что для получения равномерно пригодных разложений можно сначала с помощью разных масштабов построить разные разложения, соотнести эти разложения с помощью принципа сращивания и затем объединить их. Это есть метод сращивания асимптотических разложений, описанных в гл. 4.

Прежде чем получить, скажем, два разложения с помощью двух разных масштабов для представления решения задачи (2.2.1), мы фиксируем значения x и x/ε либо значения некоторых функций от них и затем выводим разложения. Это означает, что мы увеличиваем число независимых переменных до двух и преобра-

зовываем исходное обыкновенное дифференциальное уравнение в дифференциальное уравнение в частных производных. Данный метод представляет собой метод многих масштабов, описанный в гл. 6.

В задачах теории колебаний, описываемых уравнением

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u, \dot{u}),$$

невозмущенное решение (решение при $\varepsilon = 0$) имеет вид

$$u = a \cos \varphi, \quad \varphi = t + \theta, \quad (2.5.15)$$

где a и θ — постоянные. При $\varepsilon \neq 0$ решение все-таки может быть выражено в приведенной выше форме, если считать a и θ изменяющимися во времени. С помощью метода вариации произвольных постоянных (п. 5.1.1) можно получить следующие уравнения для a и φ :

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi], \quad (2.5.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 - \frac{\varepsilon}{a} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi]. \quad (2.5.17)$$

Для определения равномерно пригодного разложения решения этих уравнений вместо почти тождественного преобразования независимой переменной (как в методе координатных преобразований) мы можем ввести почти тождественное преобразование обеих зависимых переменных a и φ . Это есть метод усреднения, описанный в гл. 5.

Упражнения

2.1. Для уравнения

$$(x-1)(x-\tau) + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon \ll 1,$$

определить трехчленное разложение решения, близкого к единице. Будет ли оно пригодным для всех значений τ ?

2.2. Вычислить три члена в асимптотическом разложении решения задачи

$$\varepsilon y' + xy = -1, \quad y(0) = 1.$$

Какова здесь область неравномерности?

2.3. Задача о изоэнергетических цилиндрических ударных волнах может быть приведена к виду (Леви [1959])

$$\alpha \omega^2 g \frac{dg}{d\omega} = g(1 - \omega^2) - \omega(1 - \beta \omega^2),$$

где α и β — постоянные. Для $\alpha \ll 1$ определить разложение g до второго порядка по α и рассмотреть вопрос о его равномерности.

2.4. Для малого ε определить разложение первого порядка (двучленное) в задаче

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right), \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Является ли это разложение равномерно пригодным?

2.5. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y) y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$$

(а) Определить в этой задаче разложение второго порядка (трехчленное), предполагая, что $\varepsilon \ll 1$.

(б) Какова область его неравномерности?

(в) Показать, что точное решение задачи имеет вид

$$y = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1}.$$

(г) Разложить точное решение для малого ε и сравнить с результатом п. (а). Можете ли вы сделать какой-либо вывод об источнике неравномерности?

2.6. Найти при малом ε разложение первого порядка (двучленное) для задачи

$$(x + \varepsilon y) y' - \frac{1}{2} y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1.$$

Какова область его неравномерности?

2.7. Определить разложение первого порядка для малого ε :

$$(x + \varepsilon y) y' + xy = be^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}.$$

Какова область его неравномерности?

2.8. Определить двучленное разложение частного решения уравнения

$$\varepsilon u''(1 - x^2)u = f(x).$$

Какие условия нужно наложить на f , чтобы это разложение оказалось равномерным?

2.9. Определить при большом λ разложение вида

$$y = \exp[\lambda \varphi_1(x) + \varphi_0(x) + \dots]$$

для решения уравнения

$$xy'' + y' + \lambda^2 x(1 - x^2)y = 0.$$

Где это разложение нарушается?

2.10. Определить двучленное разложение для решения уравнения

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + k \cos \omega t = \varepsilon u^2.$$

Справедливо ли это разложение при всех значениях ω ?

2.11. Определить при малом ε разложение второго порядка (трехчленное) для решения задачи

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)u = 0, \\ u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Для каких значений δ это разложение будет неравномерным?

2.12. Показать, что разложение первого порядка при малом μ в задаче

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0,$$

имеет вид

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + O[\mu^2(1-x)^{-1}].$$

Какова область его неравномерности?

2.13. Для каких значений $a > 0$ разложение

$$u = a \cos t - \frac{\varepsilon}{8} \left[(a^3 - 4a) t \cos t + \frac{1}{4} a^3 \cos 3t \right] + \dots$$

является равномерно пригодным? Существует ли значение $a > 0$, при котором разложение

$$u = a \cos t + \frac{\varepsilon a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \cos 3t - 3t \sin t \right) + \dots$$

равномерно пригоден?

2.14. Положить во втором разложении упр. 2.13 $t = (1 + \varepsilon \sigma)s$ и разложить полученное выражение с точностью до $O(\varepsilon)$ при фиксированном s . Можно ли подобрать такое σ , чтобы это разложение оказалось равномерно пригодным?

2.15. Для уравнения

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

ввести новую переменную

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \right) t.$$

В полученной задаче определить разложение первого порядка. Является ли оно равномерно пригодным? Можно ли высказать какое-либо суждение о роли независимых переменных в приведении разложений к равномерно пригодному виду?

2.16. Рассмотреть задачу

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \rho \frac{dp}{dx} \right) = \Lambda \frac{d}{dx} (\rho h), \\ \rho(0) = \rho(1) = 1,$$

где $h = h(x)$ — заданная функция. Определить разложение для больших Λ . Обсудить неравномерность этого разложения. Опустить условие $p(1) = 1$ и вычислить два члена.

2.17. Рассмотреть задачу

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} = \alpha^2 f \sin(\xi + \beta),$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \cos(\xi + \beta),$$

$$f'(0) = \beta(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

возникающую при изучении изгиба цилиндрических труб (Рейсснер и Вайничке [1963]). Определить разложение с точностью $O(\alpha^2)$ при малом α и обсудить вопрос о его равномерности.

2.18. Задача о ламинарном течении в канале с равномерно пористыми стенками различной проницаемости может быть приведена к виду (Праудман [1960]; Террил и Шреста [1965])

$$\begin{aligned} f''' + R(ff'' - f'^2) &= c, \\ f(0) &= 1, \quad f'(0) = 0, \\ f(1) &= 1 - \alpha, \quad f'(1) = 0. \end{aligned}$$

Показать, что при малом α справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f &= 1 + \alpha A [2(e^{-Rx} + Rx - 1) - R(1 - e^{-R})x^2] + O(\alpha^2), \\ c &= 2\alpha R^2 A (e^{-R} - 1) + O(\alpha^2), \end{aligned}$$

и определить A .

2.19. Определить разложение первого порядка в задаче

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + u &= \varepsilon u^3, \quad \varepsilon \ll 1, \\ u(x, 0) &= a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

и обсудить вопрос о его равномерности.

2.20. Определить прямое разложение первого порядка при малом ε в задаче

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \varepsilon u u_x, \\ u(x, 0) &= f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c[g'(x) - f'(x)]. \end{aligned}$$

Здесь $f(x)$, $g(x)$ — ограниченные функции x . Обсудить вопрос о его равномерности.

Метод растянутых координат

Эта глава посвящена методике сведения приближенных решений некоторых дифференциальных уравнений, описанных в предыдущих главах, к равномерно пригодным. Эта методика основана на введении почти тождественных преобразований независимых переменных и восходит к девятнадцатому столетию, когда астрономы, такие, как Линдштедт [1882], Бохлин [1889] и Гюльден [1893], разработали способ, позволявший избежать появления вековых членов в возмущенных решениях уравнений вида

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}), \quad \varepsilon \ll 1.$$

В основе метода Линдштедта лежит идея, почерпнутая из следующего наблюдения: нелинейность изменяет частоту системы от значения ω_0 , отвечающего линейной системе, до $\omega(\varepsilon)$. Чтобы учесть это изменение частоты, Линдштедт ввел новую переменную $\tau = \omega t$ и разложил ω и u по степеням ε :

$$\begin{aligned} u &= u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned}$$

Затем он выбрал параметры ω_i , $i \geq 1$, так, чтобы предотвратить появление вековых членов. Пуанкаре [1892] доказал, что разложение, полученное Линдштедтом, является асимптотическим.

Различные формы этого метода используются для получения приближенных решений задач физики и техники. Идея заключается в том, чтобы найти параметр задачи, изменяющийся при возмущении (например, частота, волновое число, волновая скорость, собственное значение или энергетические уровни), и разложить зависимые переменные вместе с этим параметром, скажем, по степеням интенсивности возмущений. Возмущения параметра выбирают так, чтобы получить равномерно пригодное разложение. Этот метод мы называем *методом растянутых параметров*.

Эта идея лежит в основе метода Рэлея — Шредингера — метода получения приближенного стационарного решения уравнения Шредингера, при котором раскладывается не только волновая функция, но также и энергетический уровень (Шредингер [1926]). Эту же идею применил Стокер [1957] при исследовании волн конеч-

ной амплитуды на воде, разложив функцию тока и волновую скорость по степеням коэффициента крутизны волн.

Если разложение параметра интерпретировать как почти тождественное преобразование, то метод Лайтхилла сведения приближенных решений к равномерно пригодным будет обобщением метода растянутых параметров. Идея метода Лайтхилла [1949a], [1961] заключается в следующем. Пусть разложение функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \epsilon)$ по степеням ϵ неравномерно по одной из независимых переменных, скажем, по x_1 . В этом случае мы будем раскладывать по степеням ϵ не только функцию u , но также и независимую переменную x_1 , используя новую независимую переменную, т. е.

$$u = \sum_{m=0}^{N-1} \epsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\epsilon^N),$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^N \epsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\epsilon^{N+1}).$$

Последнее разложение можно рассматривать как почти тождественное преобразование переменной x_1 к переменной s . Функции ξ_m называются *растягивающими функциями* и выбираются так, чтобы разложение для u было равномерно пригодным. Другими словами, должно выполняться условие $u_m/u_{m-1} < \infty$ для всех рассматриваемых значений x_1 , или, что то же самое, высшие приближения должны быть не более сингулярными, чем предыдущие. Заметим, что если $\xi_m = \omega_m s$ с постоянными ω_m , то метод Лайтхилла переходит в метод Линдштедта—Пуанкаре. Так как в методе Лайтхилла преобразуется координата, а не параметр, то этот метод назван методом *растянутых координат*.

Для гиперболических уравнений метод Лайтхилла эквивалентен разложению зависимых и независимых переменных по некоторым или всем точным характеристикам уравнения (Уизэм [1952], [1953]; Линь [1954]; Фокс [1955]).

Вместо того чтобы вводить преобразование в дифференциальное уравнение, а затем выписывать разложение по новым переменным, Притуло [1962] предложил вводить преобразование в неоднородное прямое разложение. Преобразование затем может быть найдено непосредственно решением алгебраических, а не дифференциальных уравнений. Это является другой формой метода перенормировки (п. 7.4.2), введенного Рэлеем при анализе рассеяния. Рэлей получил разложение $u = u_0 + \epsilon u_1$ для рассеяния в тонком слое и затем представил разложение в форме $u = u_0 \exp(\epsilon u_1/u_0)$, чтобы сделать его верным для многих слоев.

В следующем параграфе дано описание метода растянутых параметров на примере нескольких физических задач. В § 3.2 метод Лайтхилла применен сначала к обыкновенным дифферен-

циальным уравнениям, а затем к уравнениям в частных производных. Далее следует описание метода линеаризации Темпла. Метод перенормировки рассмотрен в § 3.4, в то время как ограничения метода растянутых координат обсуждены в § 3.5.

3.1. Метод растянутых параметров

Как следует из приведенного выше обсуждения, этот метод основан на наличии параметра задачи, зависящего от величины возмущений. В следующих параграфах показано, что этим параметром может быть частота в слабо нелинейной системе, энергетические уровни в задачах квантовой механики, характеристический показатель в нормальном решении линейной задачи с периодическими коэффициентами, волновое число или частота в колебаниях плазмы и волновая скорость или частота поверхностных волн конечной амплитуды.

3.1.1. Метод Линдштедта — Пуанкаре

Простые примеры из п. 1.1.2 и 2.1.1 показывают, что усеченные прямые разложения по степеням ϵ уравнения вида

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}) \quad (3.1.1)$$

пригодны лишь для короткого интервала времени из-за наличия вековых членов. Сущность метода Линдштедта — Пуанкаре заключается в том, чтобы предотвратить появление вековых членов введением новой переменной

$$t = s(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots). \quad (3.1.2)$$

Тогда (3.1.1) примет вид

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^{-2} \frac{d^2 u}{ds^2} + \omega_0^2 u = \\ = \epsilon f \left[u, (1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^{-1} \frac{du}{ds} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Положим в (3.1.3)

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n. \quad (3.1.4)$$

Приравняв коэффициенты при равных степенях ϵ , получим уравнения для последовательного определения u_m . Решения для u_m не содержат вековых членов только при определенных значениях ω_m .

Этот метод применялся для широкого круга физических и математических задач. Например, Келлер [1968] модифицировал этот метод для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сочетание этого метода с методом Ритца—Галеркина часто используется при исследовании динамической реакции упругого тела (например, Хан [1965]; Бауэр [1968]; Свит [1971]). Рассмотрим в качестве примера уравнение Дюффинга:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u + \epsilon u^3 = 0. \quad (3.1.5)$$

Применив преобразование (3.1.2), получим

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 (u + \epsilon u^3) = 0. \quad (3.1.6)$$

Подставив (3.1.4) в (3.1.6) и приравняв коэффициенты при равных степенях ϵ , получим

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} + u_0 = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = -3u_0^2 u_1 - 2\omega_1 (u_1 + u_0^3) - (\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0. \quad (3.1.9)$$

Общее решение уравнения (3.1.7) имеет вид

$$u_0 = a \cos(s + \varphi), \quad (3.1.10)$$

где a и φ — постоянные интегрирования. Тогда (3.1.8) с учетом (3.1.10) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -\frac{1}{4} a^3 \cos 3(s + \varphi) - \left(\frac{3}{4} a^3 + 2\omega_1\right) a \cos(s + \varphi). \quad (3.1.11)$$

Если использовать прямое возмущенное разложение, то $\omega_n \equiv 0$ и уравнение (3.1.11) перейдет в (2.1.7), частное решение которого содержит вековые члены. Чтобы избежать появления этих вековых членов, ω_1 выбирается так, чтобы коэффициент при $\cos(s + \varphi)$ в правой части уравнения (3.1.11) исчез. Из этого условия определяем ω_1 :

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} a^2. \quad (3.1.12a)$$

Тогда решением уравнения (3.1.11) будет

$$u_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos 3(s + \varphi). \quad (3.1.12b)$$

Подставляя выражения для u_0 , u_1 и ω_1 в (3.1.9), получаем

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = \left(\frac{51}{128} a^4 - 2\omega_2\right) a \cos(s + \varphi) + NST, \quad (3.1.13)$$

где через NST обозначены слагаемые, не порождающие вековых членов. Вековые члены уничтожатся, если

$$\omega_2 = \frac{51}{256} a^4. \quad (3.1.14)$$

Поэтому

$$u = a \cos(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon}{32} a^3 \cos 3(\omega t + \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.15)$$

где a и θ — постоянные интегрирования, и

$$\begin{aligned} \omega &= \left(1 - \frac{3}{8} a^2 \varepsilon + \frac{51}{256} a^4 \varepsilon^2 + \dots \right)^{-1} = \\ &= 1 + \frac{3}{8} a^2 \varepsilon - \frac{15}{256} a^4 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

3.1.2. Переходные кривые для уравнения Матьё

В качестве второго примера найдем переходную кривую, разделяющую устойчивые и неустойчивые решения уравнения Матьё:

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0. \quad (3.1.17)$$

Это уравнение изучалось довольно интенсивно. Оно является частным случаем уравнения Хилла, которое в свою очередь является линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Аналогичные уравнения появляются во многих задачах прикладной математики, в частности в задачах об устойчивости поперечной колонны, подверженной периодической продольной нагрузке; об устойчивости периодических решений нелинейных консервативных систем; о распространении электромагнитных волн в среде с периодической структурой; о движении Луны, а также в задачах о возбуждении некоторых электрических систем.

Качественную природу уравнения (3.1.17) можно описать, используя теорию Флоке (см., например, Коддингтон и Левинсон [1955, гл. 3]). Это уравнение имеет нормальное решение вида

$$u = e^{\gamma t} \varphi(t), \quad (3.1.18)$$

где φ — периодическая функция t с периодом π или 2π , γ — действительное или комплексное число, зависящее от δ и ε . В теории Флоке показано, что переходная кривая в плоскости δ — ε , разделяющая устойчивые и неустойчивые решения, соответствует периодическим решениям уравнения (3.1.17). Некоторые из этих кривых будут найдены ниже с помощью разложений δ и u как

функций от ε . Положим

$$\delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots, \quad (3.1.19)$$

$$u(t) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (3.1.20)$$

где n — целое число или нуль, а отношение u_m/u_0 ограничено для всех m . Последнее требование необходимо для того, чтобы (3.1.20) было равномерно пригодным асимптотическим разложением.

Подставляя (3.1.19) и (3.1.20) в (3.1.17), раскладывая (3.1.17) в ряд по ε и приравнивая коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 = 0, \quad (3.1.21)$$

$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -(\delta_1 + \cos 2t) u_0, \quad (3.1.22)$$

$$\ddot{u}_2 + n^2 u_2 = -(\delta_1 + \cos 2t) u_1 - \delta_2 u_0. \quad (3.1.23)$$

Решение уравнения нулевого порядка имеет вид

$$u_0 = \begin{cases} \cos nt, \\ \sin nt. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.24)$$

Найдем высшие приближения в случаях $n=0, 1$ и 2 .

Случай $n=0$

В этом случае $u_0 = 1$ и (3.1.22) примет вид

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 - \cos 2t. \quad (3.1.25)$$

Для того чтобы (3.1.20) было равномерно пригодным асимптотическим разложением, δ_1 должно обратиться в нуль, поэтому

$$u_1 = \frac{1}{4} \cos 2t + c, \quad (3.1.26)$$

где c — постоянная. При известных u_0 и u_1 уравнение (3.1.23) примет вид

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 - \frac{1}{8} - c \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 4t. \quad (3.1.27)$$

Для того чтобы отношение u_2/u_0 было ограниченным, необходимо, чтобы $\delta_2 = -1/8$, следовательно,

$$\delta = -\frac{1}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.28)$$

Случай $n=1$

В этом случае $u_0 = \cos t$ или $\sin t$. Положим $u_0 = \cos t$, тогда (3.1.22) примет вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t. \quad (3.1.29)$$

Для ограниченности отношения u_1/u_0 величина δ_1 должна быть равна $\delta_1 = -1/2$, и поэтому

$$u_1 = \frac{1}{16} \cos 3t. \quad (3.1.30)$$

Уравнение (3.1.23) тогда примет вид

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\frac{1}{32} + \delta_2\right) \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos 5t. \quad (3.1.31)$$

Условие ограниченности отношения u_2/u_0 приводит к равенству $\delta_2 = -1/32$, откуда получим

$$\delta = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{32} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.32)$$

Если бы мы использовали в качестве нулевого приближения $u_0 = \sin t$, мы получили бы переходную кривую

$$\delta = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{32} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.33)$$

Случай $n = 2$

В этом случае $u_0 = \cos 2t$ или $\sin 2t$. В первом случае уравнение (3.1.22) предстанет в виде

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = -\frac{1}{2} - \delta_1 \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t. \quad (3.1.34)$$

Поскольку отношение u_1/u_0 должно быть ограниченным, δ_1 должно обратиться в нуль. Поэтому

$$u_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cos 4t. \quad (3.1.35)$$

Подставляя выражения для u_0 и u_1 в (3.1.23), получаем

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\left(\delta_2 - \frac{5}{48}\right) \cos 2t - \frac{1}{48} \cos 6t. \quad (3.1.36)$$

Из условия ограниченности u_2/u_0 следует, что $\delta_2 = 5/48$, поэтому

$$\delta = 4 + \frac{5}{48} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.37)$$

Положив $u_0 = \sin 2t$, придем к равенству

$$\delta = 4 - \frac{1}{48} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.38)$$

3.1.3. Характеристические показатели для уравнения Матьё (метод Уиттекера)

В теории Флоке (см., например, Коддингтон и Левинсон [1955], гл. 3) показано, что уравнение (3.1.17) имеет решение вида (3.1.18), где φ — периодическая функция с периодом π или 2π , а γ — действительная или комплексная постоянная. После подстановки (3.1.18) в (3.1.17) и соответствующих преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + (\delta + \gamma^2 + \varepsilon \cos 2t) \varphi = 0. \quad (3.1.39)$$

Поскольку переходная кривая соответствует $\gamma = 0$, то вблизи нее можно получить приближение для φ (Уиттекер [1914]), введя следующие разложения для φ , δ и γ :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots, \quad (3.1.40)$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots, \quad (3.1.41)$$

$$\gamma = \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots. \quad (3.1.42)$$

Ниже будет получено решение в случае $\delta_0 = 1$.

Подставив (3.1.40) — (3.1.42) в (3.1.39) и приравняв коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 = 0, \quad (3.1.43)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = -2\gamma_1\dot{\varphi}_0 - (\delta_1 + \cos 2t) \varphi_0, \quad (3.1.44)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = -2\gamma_1\dot{\varphi}_1 - 2\gamma_2\dot{\varphi}_0 - (\gamma_1^2 + \delta_2) \varphi_0 - (\delta_1 + \cos 2t) \varphi_1. \quad (3.1.45)$$

Общее решение уравнения (3.1.43) имеет вид

$$\varphi_0 = a \cos t + b \sin t, \quad (3.1.46)$$

где a и b — постоянные. Таким образом, уравнение (3.1.44) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = & \left[2\gamma_1 a + \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) b \right] \sin t - \left[2\gamma_1 b + \left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) a \right] \cos t - \\ & - \frac{1}{2} a \cos 3t - \frac{1}{2} b \sin 3t. \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

Так как φ — периодическая функция, то слагаемые, которые порождают вековые члены, должны исчезнуть, т. е.

$$2\gamma_1 a + \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) b = 0, \quad (3.1.48)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) a + 2\gamma_1 b = 0. \quad (3.1.49)$$

Для существования нетривиального решения этой системы уравнений относительно a и b необходимо, чтобы ее определитель

был равен нулю, т. е.

$$\gamma_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\delta_1^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (3.1.50)$$

Далее

$$b = \frac{2\gamma_1}{\delta_1 - \frac{1}{2}} a. \quad (3.1.51)$$

Решение уравнения (3.1.47), подчиненное условиям (3.1.48), (3.1.49), имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{16} a \cos 3t + \frac{1}{16} b \sin 3t. \quad (3.1.52)$$

Используя полученные выше результаты, перепишем (3.1.45) в виде

$$\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = \left[2\gamma_2 a - \left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) b \right] \sin t - \left[\left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) a + 2\gamma_2 b \right] \cos t + NST. \quad (3.1.53)$$

Вековые члены исчезнут, если

$$2\gamma_2 a - \left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) b = 0, \quad (3.1.54)$$

$$\left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) a + 2\gamma_2 b = 0. \quad (3.1.55)$$

Поскольку b и a связаны соотношением (3.1.51), то (3.1.54) и (3.1.55) могут быть одновременно удовлетворены тогда и только тогда, когда

$$\gamma_2 = 0 \text{ и } \delta_2 = -\gamma_1^2 - \frac{1}{32}. \quad (3.1.56)$$

Поэтому для первого приближения имеем

$$u = ae^{\pm(1/2)\varepsilon t} \sqrt{(1/4) - \delta_1^2} \left[\left(\cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t \right) + \frac{2\gamma_1}{\delta_1 - \frac{1}{2}} \left(\sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t \right) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.57)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon \delta_1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left(\delta_1^2 - \frac{3}{8} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.58)$$

Обозначим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cos 2\sigma, \quad (3.1.59)$$

тогда

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{4} \sin 2\sigma, \quad \delta_2 = \frac{1}{32} (\cos 4\sigma - 2), \\ \frac{b}{a} &= \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - 1} = -\operatorname{ctg} \sigma.\end{aligned}\quad (3.1.60)$$

Следовательно, (3.1.57) и (3.1.58) примут вид

$$u = \tilde{a} e^{(1/4)(\sin 2\sigma) \varepsilon t} \left[\sin(t - \sigma) + \frac{1}{16} \varepsilon \sin(3t - \sigma) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.61)$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \cos 2\sigma + \frac{1}{32} \varepsilon^2 (\cos 4\sigma - 2) + O(\varepsilon^3), \quad (3.1.62)$$

где \tilde{a} — постоянная.

3.1.4. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел

Рассмотрим систему четвертого порядка с периодическими коэффициентами, связанную с устойчивостью треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел. Математически задача определяется системой уравнений

$$x'' - 2y' - \frac{h_2 x}{1 + e \cos f} = 0, \quad (3.1.63)$$

$$y'' + 2x' - \frac{h_1 y}{1 + e \cos f} = 0, \quad (3.1.64)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по f и

$$h_{1,2} = \frac{3}{2} [1 \pm \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}]. \quad (3.1.65)$$

Уравнения (3.1.63) — (3.1.65) описывают движение частицы, линеаризованное около треугольных точек в ограниченной задаче трех тел. Здесь e — эксцентриситет орбиты двух масс, μ — отношение меньшей массы к сумме двух масс. В случае $e = 0$ известно, что движение устойчиво при $0 \leq \mu < \tilde{\mu} \approx 0,03852$ и неустойчиво при $\mu \geq \tilde{\mu}^1$). Иначе говоря, $\tilde{\mu}$ определяет точку пересечения переходной кривой, разделяющей устойчивые и неустойчивые движе-

¹) Этот результат справедлив лишь в линейном приближении. Анализ устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел, основанный на точных нелинейных уравнениях и использующий результаты В. И. Арнольда [1963], был проведен в работах А. М. Леонтовича [1963], Депри [1962] и Депри — Бартоломе [1967] и А. П. Маркеева [1968], [1969]. Окончательный результат состоит в том, что точки либрации устойчивы для всех $0 < \mu < \tilde{\mu}$, кроме двух критических значений $\mu_1^* = 0,0135160$ и $\mu_2^* = 0,0242938$, для которых они неустойчивы. — *Прим. ред.*

ния, с осью μ в плоскости $\mu-e$. Кроме того, как известно из теории Флоке, переходным кривым соответствуют периодические решения с периодами 2π и 4π . В интервале $0 \leq \mu < \bar{\mu}$ период 2π соответствует $\mu=0$, а период 4π соответствует $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2}/3)/2$. Через точку $\mu=0$ проходит переходная кривая, совпадающая с осью e . Ниже мы приведем анализ, данный Найфэ и Кемелом [1970a], и определим переходную кривую, пересекающую ось μ в точке μ_0 .

Предположим

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} e^n x_n(f), \quad (3.1.66)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} e^n y_n(f), \quad (3.1.67)$$

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mu_n. \quad (3.1.68)$$

Подставив (3.1.68) в (3.1.65) и разложив при малых e , получим

$$h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) e^n, \quad (3.1.69)$$

$$h_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) e^n, \quad (3.1.70)$$

где

$$a_0, b_0 = \left[\frac{3}{2}(1+k), \frac{3}{2}(1-k) \right], \quad k = \sqrt{\frac{11}{12}}, \quad (3.1.71)$$

$$b_1 = -a_1 = 3 \sqrt{\frac{6}{11}} \mu_1. \quad (3.1.72)$$

Подставив затем (3.1.66)–(3.1.70) в (3.1.63) и (3.1.64) и приравняв коэффициенты при равных степенях e , получим

$$x_n'' - 2y_n' = \sum_{\substack{t=0, s=0, r=0 \\ n=t+s+r}}^{\infty} (-1)^t x_r b_s \cos^t f, \quad (3.1.73)$$

$$y_n'' + 2x_n' = \sum_{\substack{t=0, s=0, r=0 \\ n=t+s+r}}^{\infty} (-1)^t y_r a_s \cos^t f. \quad (3.1.74)$$

Уравнения нулевого порядка допускают следующие периодические решения с периодом 4π :

$$x_0 = \cos \tau, \quad y_0 = -\alpha \sin \tau, \quad (3.1.75)$$

$$x_0 = \sin \tau, \quad y_0 = \alpha \cos \tau, \quad (3.1.76)$$

где

$$\tau = \frac{f}{2}, \quad \alpha = b_0 + \frac{1}{4} = \left(a_0 + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{33}). \quad (3.1.77)$$

Существуют две переходные кривые, пересекающие ось μ при $\mu = \mu_0$, соответствующие указанным двум независимым решениям. Взяв решение (3.1.75), мы получим следующую задачу для первого приближения:

$$x_1'' - 2y_1' - b_0 x_1 = \left(b_1 - \frac{1}{2}b_0\right) \cos \tau - \frac{1}{2}b_0 \cos 3\tau, \quad (3.1.78)$$

$$y_1'' + 2x_1' - a_0 y_1 = -\alpha \left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right) \sin \tau + \frac{1}{2}\alpha a_0 \sin 3\tau. \quad (3.1.79)$$

Члены, пропорциональные $\cos \tau$ и $\sin \tau$, приводят к появлению вековых членов в частном решении для x_1 и y_1 . Чтобы определить необходимые условия уничтожения вековых членов, рассмотрим частное решение вида

$$x_p = 0, \quad y_p = c \sin \tau. \quad (3.1.80)$$

Подставив (3.1.80) в (3.1.78) и (3.1.79) и приравняв коэффициенты при $\cos \tau$ и $\sin \tau$, получим

$$c = -\left(b_1 - \frac{b_0}{2}\right), \quad c\left(a_0 + \frac{1}{4}\right) = \alpha\left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right). \quad (3.1.81)$$

Условие обращения c в нуль приводит к равенству

$$b_1 - \frac{1}{2}b_0 = -\alpha^2\left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right). \quad (3.1.82)$$

Так как $b_1 = -a_1$, то

$$b_1 = \frac{b_0 - a_0 \alpha^2}{2(1 - \alpha^2)} \approx -0,1250. \quad (3.1.83)$$

Поэтому из (3.1.72) получаем

$$\mu_1 \approx -0,05641. \quad (3.1.84)$$

Таким образом, переходная кривая с точностью до первого порядка имеет вид

$$\mu = 0,02859 - 0,05641e + O(e^2). \quad (3.1.85)$$

Если бы мы использовали решение (3.1.76) для задачи нулевого порядка, мы бы получили вторую ветвь

$$\mu = 0,02859 + 0,05641e + O(e^2). \quad (3.1.86)$$

Приведенное выше исследование можно непосредственно продолжить до высших порядков. Оно было выполнено Найфэ и Кемелом [1970a] вплоть до четвертого порядка.

3.1.5. Характеристические показатели для треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел

Из теории Флоке известно, что уравнения (3.1.63) и (3.1.64) имеют нормальные решения вида

$$x, y = e^{\gamma f} [\varphi(f), \psi(f)], \quad (3.1.87)$$

где φ и ψ — периодические функции с периодом 2π и 4π , γ — действительное или комплексное число. Подстановка (3.1.87) в (3.1.63) и (3.1.64) приводит к

$$\varphi'' + 2\gamma\varphi' - 2\psi' + \gamma^2\varphi - 2\gamma\psi - \frac{h_2\varphi}{1+e\cos f} = 0, \quad (3.1.88)$$

$$\psi'' + 2\gamma\psi' + 2\varphi' + \gamma^2\psi + 2\gamma\varphi - \frac{h_1\psi}{1+e\cos f} = 0. \quad (3.1.89)$$

Переходная кривая соответствует $\gamma = 0$, следовательно, вблизи этой переходной кривой γ мало. Поэтому для того, чтобы получить разложения для φ и ψ , пригодные вблизи переходной кривой, пересекающей ось μ в точке μ_0 , положим

$$\varphi = \varphi_0 + e\varphi_1 + \dots, \quad (3.1.90)$$

$$\psi = \psi_0 + e\psi_1 + \dots, \quad (3.1.91)$$

$$\gamma = e\gamma_1 + \dots, \quad (3.1.92)$$

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + \dots. \quad (3.1.93)$$

Подставляя (3.1.90) — (3.1.93) в (3.1.88), (3.1.89) и (3.1.65) и приравнивая члены с равными степенями e , получим

Нулевой порядок (e^0)

$$\varphi_0'' - 2\psi_0' - b_0\varphi_0 = 0, \quad (3.1.94)$$

$$\psi_0'' + 2\varphi_0' - a_0\psi_0 = 0. \quad (3.1.95)$$

Первый порядок (e)

$$\varphi_1'' - 2\psi_1' - b_0\varphi_1 = -2\gamma_1\varphi_0' + 2\gamma_1\psi_0 + b_1\varphi_0 - b_0\varphi_0 \cos f, \quad (3.1.96)$$

$$\psi_1'' + 2\varphi_1' - a_0\psi_1 = -2\gamma_1\psi_0' - 2\gamma_1\varphi_0 + a_1\psi_0 - a_0\psi_0 \cos f. \quad (3.1.97)$$

Общее решение уравнений (3.1.94) и (3.1.95) имеет вид

$$\varphi_0 = A \cos \tau + B \sin \tau, \quad (3.1.98)$$

$$\psi_0 = \alpha B \cos \tau - \alpha A \sin \tau. \quad (3.1.99)$$

Это решение определяет правые части уравнений (3.1.96) и (3.1.97), поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_1'' - 2\psi_1' - b_0\varphi_1 = & P_{11} \cos \tau + Q_{11} \sin \tau - \\ & - \frac{1}{2} b_0 A \cos 3\tau - \frac{1}{2} b_0 B \sin 3\tau, \end{aligned} \quad (3.1.100)$$

$$\begin{aligned} \psi_1'' + 2\varphi_1' - a_0\psi_1 = & P_{12} \cos \tau + Q_{12} \sin \tau - \\ & - \frac{1}{2} a_0 \alpha B \cos 3\tau + \frac{1}{2} a_0 \alpha A \sin 3\tau, \end{aligned} \quad (3.1.101)$$

где

$$\begin{aligned}P_{11} &= \gamma_1 (2\alpha - 1) B + \left(b_1 - \frac{b_0}{2}\right) A, \\P_{12} &= \gamma_1 (\alpha - 2) A + \alpha \left(a_1 - \frac{a_0}{2}\right) B, \\Q_{11} &= -\gamma_1 (2\alpha - 1) A + \left(b_1 + \frac{b_0}{2}\right) B, \\Q_{12} &= \gamma_1 (\alpha - 2) B - \alpha \left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right) A.\end{aligned}$$

Так как функции φ и ψ — периодические, то вековые члены в решениях для φ_1 и ψ_1 должны исчезнуть. Чтобы уничтожить эти вековые члены, положим

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau. \quad (3.1.102)$$

Подставив (3.1.102) в (3.1.100) и (3.1.101) и приравняв коэффициенты при $\sin \tau$ и $\cos \tau$ в обеих частях уравнений, получим

$$\begin{aligned}c_1 &= Q_{11}, & -c_2 &= P_{11}, \\-\left(a_0 + \frac{1}{4}\right) c_1 &= P_{12}, & -\left(a_0 + \frac{1}{4}\right) c_2 &= Q_{12}.\end{aligned} \quad (3.1.103)$$

Исключение c_1 и c_2 из (3.1.103) дает

$$P_{11} = \alpha Q_{12}, \quad Q_{11} = -\alpha P_{12}. \quad (3.1.104)$$

После подстановки выражений для P и Q в (3.1.104) и перегруппировки членов получим

$$\left[b_1 - \frac{b_0}{2} + \alpha^2 \left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right)\right] A - \gamma_1 (1 - 4\alpha + \alpha^2) B = 0, \quad (3.1.105)$$

$$\gamma_1 (1 - 4\alpha + \alpha^2) A + \left[b_1 + \frac{b_0}{2} + \alpha^2 \left(a_1 - \frac{a_0}{2}\right)\right] B = 0. \quad (3.1.106)$$

Для существования нетривиального решения системы уравнений (3.1.105), (3.1.106) относительно A и B ее определитель должен обратиться в нуль. Это условие приводит к равенству

$$\gamma_1^2 = - \frac{\left[b_1 - \frac{1}{2} b_0 + \alpha^2 \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0\right)\right] \left[b_1 + \frac{1}{2} b_0 + \alpha^2 \left(a_1 - \frac{1}{2} a_0\right)\right]}{(1 - 4\alpha + \alpha^2)^2}. \quad (3.1.107)$$

Далее

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1 - \frac{1}{2} b_0 + \alpha^2 \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0\right)}{\gamma_1 (1 - 4\alpha + \alpha^2)} = \operatorname{tg} \sigma. \quad (3.1.108)$$

Поэтому для первого приближения получим

$$x, y = e^{e\gamma_1 t} \left[\cos \left(\frac{1}{2} f - \sigma \right), -\alpha \sin \left(\frac{1}{2} f - \sigma \right) \right] + O(e). \quad (3.1.109)$$

Переходная кривая (3.1.85), (3.1.86) соответствует $\gamma_1 = 0$, а (3.1.75) и (3.1.76) можно получить из (3.1.109), положив $\gamma_1 = 0$ и $\sigma = 0$ или $\pi/2$.

Настоящий анализ можно непосредственно продолжить до более высоких порядков, несмотря на сложность алгебраических выкладок. Найфэ [1970a] получил разложение до второго порядка.

3.1.6. Простая линейная задача на собственные значения

Рассмотрим теперь задачу определения собственного значения λ и собственной функции u , где

$$u'' + [\lambda + \varepsilon f(x)] u = 0, \quad f(x) = f(-x), \quad (3.1.110)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.111)$$

и ε — малый параметр. Если $\varepsilon = 0$, то собственные функции и собственные значения соответственно будут равны

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.112)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2. \quad (3.1.113)$$

Вышеприведенные собственные функции ортонормированы, т. е.

$$\int_0^1 u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn}, \quad (3.1.114)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера, определяемый следующим образом:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Для малых ненулевых ε получим приближенное значение для u_n и λ_n , положив

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x + \varepsilon u_{n1} + \varepsilon^2 u_{n2} + \dots, \quad (3.1.115)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots \quad (3.1.116)$$

Подставляя (3.1.115) и (3.1.116) в (3.1.110) и (3.1.111) и приравнявая коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$u_{n1}'' + n^2 \pi^2 u_{n1} = -f(x) u_{n0} - \lambda_{n1} u_{n0}, \quad (3.1.117)$$

$$u_{n1}(0) = u_{n1}(1) = 0,$$

$$u_{n2}'' + n^2 \pi^2 u_{n2} = -f(x) u_{n1} - \lambda_{n1} u_{n1} - \lambda_{n2} u_{n0}, \quad (3.1.118)$$

$$u_{n2}(0) = u_{n2}(1) = 0.$$

Здесь задача нулевого порядка тождественно удовлетворяется и $u_{n0} = \sqrt{2} \sin n\pi x$.

Будем предполагать, что u_{n1} может быть выражено в виде линейной комбинации собственных функций нулевого порядка u_{n0} , т. е.

$$u_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sqrt{2} \sin m\pi x. \quad (3.1.119)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям для u_{n1} . Подставляя (3.1.119) в (3.1.117), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} \pi^2 (n^2 - m^2) a_{nm} \sin m\pi x = -\sqrt{2} f(x) \sin n\pi x - \sqrt{2} \lambda_{n1} \sin n\pi x. \quad (3.1.120)$$

Умножая (3.1.120) на $\sqrt{2} \sin k\pi x$, интегрируя от 0 до 1 и используя свойство ортонормированности (3.1.114) собственных функций (3.1.112), получаем

$$\pi^2 (n^2 - k^2) a_{nk} = -F_{nk} - \lambda_{n1} \delta_{nk}, \quad (3.1.121)$$

где

$$F_{nk} = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \sin k\pi x dx. \quad (3.1.122)$$

Если $k=n$, то левая часть (3.1.121) обратится в нуль. Следовательно,

$$\lambda_{n1} = -F_{nn} = -2 \int_0^1 f(x) \sin^2 n\pi x dx. \quad (3.1.123)$$

Однако при $k \neq n$

$$a_{nk} = -\frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)}. \quad (3.1.124)$$

Условие (3.1.123) эквивалентно уничтожению вековых членов. В этом случае функции u_{n1} будут

$$u_{n1} = -\sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x + a_{nn} \sqrt{2} \sin n\pi x. \quad (3.1.125)$$

Заметим, что a_{nn} еще не определены, но в окончательном решении они определяются нормировкой u_n .

Переходя ко второму порядку, предположим, что

$$u_{n2} = \sum_{r=1}^{\infty} b_{nr} \sqrt{2} \sin r\pi x. \quad (3.1.126)$$

Подставляя выражения для u_{n2} , u_{n1} и u_{n0} в (3.1.118), получаем

$$\pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} (n^2 - r^2) \sqrt{2} b_{nr} \sin r\pi x = - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sqrt{2} f(x) \sin k\pi x - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \lambda_{n1} \sqrt{2} \sin k\pi x - \lambda_{n2} \sqrt{2} \sin n\pi x. \quad (3.1.127)$$

Умножая (3.1.127) на $\sqrt{2} \sin s\pi x$, интегрируя от 0 до 1 и используя свойство ортонормированности (3.1.114), получаем

$$\pi^2 (n^2 - s^2) b_{ns} = - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F_{ks} - a_{ns} \lambda_{n1} - \lambda_{n2} \delta_{ns}. \quad (3.1.128)$$

Если $s = n$, то левая часть (3.1.128) обращается в нуль, в то время как правая часть дает

$$\lambda_{n2} = - \sum_{k \neq n} a_{nk} F_{kn} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2 (n^2 - k^2)}. \quad (3.1.129)$$

Если $s \neq n$, то (3.1.128) дает

$$b_{ns} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk} F_{ks}}{\pi^4 (n^2 - k^2)(n^2 - s^2)} - \frac{a_{nn} F_{ns}}{\pi^2 (n^2 - s^2)} - \frac{F_{nn} F_{ns}}{\pi^4 (n^2 - s^2)^2}. \quad (3.1.130)$$

Здесь b_{nn} также еще не определены, но определяются при нормировке u_n .

Для нормировки u_n потребуем, чтобы

$$\int_0^1 (u_{n0} + \epsilon u_{n1} + \epsilon^2 u_{n2})^2 dx = 1. \quad (3.1.131)$$

Поскольку u_{n0} нормирована, то

$$\int_0^1 u_{n0} u_{n1} dx = 0, \quad (3.1.132)$$

$$\int_0^1 (2u_{n0} u_{n2} + u_{n1}^2) dx = 0. \quad (3.1.133)$$

Условие (3.1.132) дает $a_{nn} = 0$, а условие (3.1.133) дает

$$b_{nn} = - \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} a_{nk}^2. \quad (3.1.134)$$

Поэтому с точностью до второго порядка имеем

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x - \varepsilon \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x + \\ + \varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \left\{ \left[\sum_{s \neq n} \frac{F_{ns} F_{ks}}{\pi^4 (n^2 - s^2) (n^2 - k^2)} - \frac{F_{nn} F_{nk}}{\pi^4 (n^2 - k^2)^2} \right] \sqrt{2} \sin k\pi x - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{F_{nk}^2}{\pi^4 (n^2 - k^2)^2} \sqrt{2} \sin n\pi x \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (3.1.135)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \varepsilon F_{nn} + \varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2 (n^2 - k^2)} + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.136)$$

Метод разложения, описанный в этом пункте, называется методом Рэля — Шредингера. Он был развит Шредингером [1926] для исследования стационарных решений уравнения Шредингера. За большей библиографией и более полным изложением мы отсылаем читателя к книге под редакцией Уилкокса [1966] и к статье Хиршфельдера [1969].

3.1.7. Квазилинейная задача на собственные значения

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$H\varphi + \lambda\varphi = \varepsilon F(\varphi) \quad (3.1.137)$$

при однородном граничном условии

$$B(\varphi) = 0, \quad (3.1.138)$$

где H — линейный, а F — нелинейный операторы, действующие на φ . Мы ищем приближенное решение для малых ε в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots, \quad (3.1.139)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots. \quad (3.1.140)$$

Подставляя (3.1.139) и (3.1.140) в (3.1.137) и (3.1.138) и приравнявая коэффициенты при равных степенях ε , получаем

$$H\varphi_0 + \lambda_0\varphi_0 = 0, \quad B(\varphi_0) = 0, \quad (3.1.141)$$

$$H\varphi_1 + \lambda_0\varphi_1 = -\lambda_1\varphi_0 + F(\varphi_0), \quad B(\varphi_1) = 0. \quad (3.1.142)$$

Необходимо различать два случая в зависимости от того, являются собственные значения задачи (3.1.141) различными или нет. Первый случай называется *невыврожденным*, в то время как второй называется *вырожденным*, поскольку кратному собственному значению соответствует более одной собственной функции. Оба случая излагаются ниже.

Невырожденный случай. Допустим, что задача (3.1.141) решена и ее решение дает собственные функции u_n , соответствующие собственным значениям μ_n , $n = 1, 2, \dots$. Предположим далее, что $\mu_m \neq \mu_n$, если $m \neq n$, и что собственные функции $\{u_n\}$ образуют ортонормированное семейство, т. е.

$$\int_D u_n \bar{u}_m dx = \delta_{mn}, \quad (3.1.143)$$

где x — вектор, изображающий координаты, \bar{u} — комплексно сопряженная к u функция, а интегрирование ведется по всей рассматриваемой области D . Чтобы решить (3.1.142), мы, так же как и в двух предыдущих пунктах, разложим функцию φ_1 по ортонормированному базису $\{u_n\}$, т. е.

$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m. \quad (3.1.144)$$

Таким образом, φ_1 удовлетворяет краевому условию $B(\varphi_1) = 0$, так как $B(u_m) = 0$ для всех m . Полагая $\varphi_0 = u_n$ и $\lambda_0 = \mu_n$ и подставляя (3.1.144) в (3.1.142), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_m) a_m u_m = -\lambda_1 u_n + F(u_n). \quad (3.1.145)$$

Умножая (3.1.145) на \bar{u}_s , интегрируя по области D и используя условие ортонормированности, приходим к равенству

$$(\mu_n - \mu_s) a_s = -\lambda_1 \delta_{ns} + F_{ns}, \quad (3.1.146)$$

где

$$F_{ns} = \int_D F(u_n) \bar{u}_s dx. \quad (3.1.147)$$

Если $n = s$, (3.1.146) дает

$$\lambda_1 = F_{nn}. \quad (3.1.148)$$

Если $n \neq s$, то

$$a_s = \frac{F_{ns}}{\mu_n - \mu_s}. \quad (3.1.149)$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \sum_{m \neq n} \frac{F_{nm}}{\mu_n - \mu_m} u_m + a_{nn} u_n. \quad (3.1.150)$$

Коэффициенты a_{nn} можно положить равными нулю, если, так же как и в предыдущем пункте, предположить, что функция $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + O(\varepsilon^2)$ нормирована. Поэтому для первого порядка имеем

$$\varphi = u_n + \varepsilon \sum_{m \neq n} \frac{F_{nm}}{\mu_n - \mu_m} u_m + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.151)$$

$$\lambda = \mu_n + \varepsilon F_{nn} + O(\varepsilon^2). \quad (3.1.152)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi = -\varepsilon \varphi^3, \quad (3.1.153)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (3.1.154)$$

Здесь D — интервал $[0, 1]$ и

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \mu_n = n^2 \pi^2. \quad (3.1.155)$$

Поскольку $F(\varphi) = -\varphi^3$ и $\bar{u}_m = u_m$, имеем

$$\begin{aligned} F_{nm} &= -4 \int_0^1 \sin^3 n\pi x \sin m\pi x dx = \\ &= \int_0^1 (\sin 3n\pi x - 3 \sin n\pi x) \sin m\pi x dx = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{m, 3n} - \frac{3}{2} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.1.156)$$

Поэтому (3.1.151) и (3.1.152) принимают вид

$$\varphi = \sqrt{2} \sin n\pi x - \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{16n^2 \pi^2} \sin 3n\pi x + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.157)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \frac{3}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.1.158)$$

Вырожденный случай. В этом случае пусть $\mu_{n+k} = \mu_n$ для $k=0, 1, 2, \dots, M$. Тогда

$$\varphi_0 = \sum_{k=0}^M b_k u_{n+k}. \quad (3.1.159)$$

Подставив выражения для φ_1 и φ_0 из (3.1.144) и (3.1.159) в (3.1.142) и положив $\lambda_0 = \mu_n$, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_m) a_m u_m = -\lambda_1 \sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} + F \left[\sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} \right]. \quad (3.1.160)$$

Умножим (3.1.160) на \bar{u}_s и проинтегрируем по области D . Имеем

$$(\mu_n - \mu_s) a_s = -\lambda_1 \sum_{k=0}^M b_k \delta_{s, n+k} + \mathcal{F}_s(b_0, b_1, \dots, b_M), \quad (3.1.161)$$

где

$$\mathcal{F}_s = \int_D F \left[\sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} \right] \bar{u}_s dx, \quad (3.1.162)$$

если $s = n + k$, для $k = 0, 1, 2, \dots, M$, то (3.1.161) даст

$$\mathcal{F}_{n+k}(b_0, b_1, \dots, b_M) - \lambda_1 b_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (3.1.163)$$

Соотношения (3.1.163) образуют систему из $M + 1$ однородных алгебраических уравнений относительно $M + 1$, неизвестных b_m и собственного значения λ_1 . Если $s \neq n + k$, $k = 0, 1, \dots, M$, то

$$a_s = \frac{\mathcal{F}_s(b_0, b_1, \dots, b_M)}{\mu_n - \mu_s}. \quad (3.1.164)$$

В качестве примера рассмотрим задачу

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} + 5\pi^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi = \varepsilon \varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.1.165)$$

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = 0. \quad (3.1.166)$$

В этом случае решение линеаризованной задачи имеет вид

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \mu_n = n^2(5 - n^2)\pi^4. \quad (3.1.167)$$

Таким образом, $\mu_1 = \mu_2 = 4\pi^4$, и мы имеем дело с вырождением. Предположим, что функция, соответствующая собственному значению μ_1 , имеет вид

$$\varphi_0 = b_0 \sqrt{2} \sin \pi x + b_1 \sqrt{2} \sin 2\pi x. \quad (3.1.168)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\varphi_0) &= \varphi_0 \frac{d\varphi_0}{dx} = \\ &= \pi [-b_0 b_1 \sin \pi x + b_0^2 \sin 2\pi x + 3b_0 b_1 \sin 3\pi x + 2b_1^2 \sin 4\pi x]. \end{aligned} \quad (3.1.169)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s &= \sqrt{2} \int_0^1 F(\varphi_0) \sin s\pi x dx = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi [-b_0 b_1 \delta_{1s} + b_0^2 \delta_{2s} + 3b_0 b_1 \delta_{3s} + 2b_1^2 \delta_{4s}]. \end{aligned} \quad (3.1.170)$$

При известном \mathcal{F}_s соотношения (3.1.163) примут вид

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi b_0 b_1 - \lambda_1 b_0 = 0, \quad (3.1.171)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi b_0^2 - \lambda_1 b_1 = 0, \quad (3.1.172)$$

а выражение (3.1.164) даст

$$a_3 = \frac{3b_0 b_1}{40\sqrt{2}\pi^3}, \quad a_4 = \frac{b_1^2}{90\sqrt{2}\pi^3}. \quad (3.1.173)$$

Поскольку $b_0 \neq 0$, из (3.1.171) получим

$$b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\lambda_1. \quad (3.1.174)$$

Подставляя выражение для b_1 в (3.1.172) и разрешая относительно λ_1 , получаем

$$\lambda_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} i\pi b_0. \quad (3.1.175)$$

Следовательно,

$$b_1 = \pm i b_0. \quad (3.1.176)$$

Поэтому

$$\varphi = b_0 \sqrt{2} \sin \pi x \pm i b_0 \sqrt{2} \sin 2\pi x + \varepsilon \left[a_1 \sqrt{2} \sin \pi x + \right. \\ \left. + a_2 \sqrt{2} \sin 2\pi x \pm \frac{3}{40\pi^3} i b_0^2 \sin 3\pi x - \frac{1}{90\pi^3} b_0^2 \sin 4\pi x \right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.177)$$

$$\lambda = 4 \mp \frac{\pi}{\sqrt{2}} \varepsilon i b_0 + O(\varepsilon^2). \quad (3.1.178)$$

Постоянные a_1 и a_2 могут быть связаны с b_0 при нормировке φ_0 . Решения, соответствующие μ_n , $n > 1$, имеют вид

$$\varphi = \sqrt{2} \sin n\pi x + \varepsilon \frac{1}{15n(n^2-1)\pi^3} \sin 2n\pi x + O(\varepsilon^2), \quad (3.1.179)$$

$$\lambda = n^2(5-n^2)\pi^4 + O(\varepsilon^2). \quad (3.1.180)$$

Следует отметить, что для реализации вышеизложенной процедуры должно существовать разложение функции $F(\varphi_0)$ по собственным функциям задачи нулевого порядка. Например, если в (3.1.165) положить $F(\varphi) = \varphi^2$, то попытка применить описанную процедуру потерпит неудачу. Действительно, в этом случае $F(\varphi_0) = b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos \pi x - b_0^2 \cos 2\pi x -$

$$-2b_0 b_1 \cos 3\pi x - b_1^2 \cos 4\pi x. \quad (3.1.181)$$

Откуда $\mathcal{F}_s = 0$ для всех s , и выражение (3.1.150) для φ_1 будет непригодным.

3.1.8. Квазilinearное уравнение Клейна—Гордона

В этом пункте мы рассмотрим задачу определения периодических распространяющихся волн конечной амплитуды для уравнения

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma^2 u = \beta u^3. \quad (3.1.182)$$

Если пренебречь нелинейным членом βu^3 , то мы получим решение в виде линейных распространяющихся периодических волн

$$u = a \cos(kx - \omega t), \quad \omega^2 = \alpha^2 k^2 + \gamma^2. \quad (3.1.183)$$

Фазовая скорость этих волн равна ω/k и не зависит от амплитуды. В нелинейной задаче фазовая скорость будет, вообще говоря, функцией амплитуды.

Для определения зависимости фазовой скорости c от амплитуды мы предположим, что

$$u = u(\theta), \quad \theta = x - ct,$$

тогда (3.1.182) примет вид

$$(c^2 - \alpha^2) u'' + \gamma^2 u = \beta u^3, \quad (3.1.184)$$

где штрих означает дифференцирование по θ . Предполагая, что амплитуда u мала, разложим u и c

$$\begin{aligned} u &= au_1 + a^3 u_3 + \dots, \\ c &= c_0 + a^2 c_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.185)$$

Если бы мы включили в эти разложения члены ac_1 и $a^2 u_2$, то получили бы, что $c_1 = 0$, а u_2 удовлетворяет тому же уравнению, что и u_1 . Поэтому u_2 не включено в разложение.

Подставив (3.1.185) в (3.1.184) и приравняв коэффициенты при равных степенях a , получим

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_1'' + \gamma^2 u_1 = 0, \quad (3.1.186)$$

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_3'' + \gamma^2 u_3 = -2c_0 c_2 u_1'' + \beta u_1^3. \quad (3.1.187)$$

Для уравнения (3.1.186) возьмем решение вида

$$u_1 = \cos k\theta, \quad c_0^2 = \alpha^2 + \gamma^2 k^{-2} \quad (3.1.188)$$

так, чтобы (3.1.185) совпадало с (3.1.183) с точностью до $O(a)$. Тогда (3.1.187) примет вид

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_3'' + \gamma^2 u_3 = \left(2c_0 c_2 k^2 + \frac{3}{4} \beta \right) \cos k\theta + \frac{1}{4} \beta \cos 3k\theta. \quad (3.1.189)$$

Вековые члены будут устранены, если $c_2 = -3\beta/8c_0 k^2$. Тогда

$$u_3 = -\frac{\beta}{32\gamma^2} \cos 3k\theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u &= a \cos k\theta - \frac{a^3\beta}{32\gamma^2} \cos 3k\theta + \dots, \\ c &= \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 k^{-2}} \left[1 - \frac{3a^2\beta}{8(\alpha^2 k^2 + \gamma^2)} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.190)$$

Методика, использованная в этом пункте, была формализована Стокером [1957] для описания поверхностных волн в жидкости. Эта методика была использована при рассмотрении взаимодействия капиллярных и гравитационных волн на воде бесконечной и конечной глубины Пирсоном и Файфом [1961] и Баракатом и Хаустоном [1968] соответственно. Она использовалась также Мэслоу и Келли [1970] при рассмотрении волн в течении Кельвина — Гельмгольца.

Вместо того чтобы раскладывать фазовую скорость, можно было бы разложить волновое число и определить сдвиг волнового числа, или разложить частоту и определить сдвиг частоты. Разновидности этого метода применялись к целому ряду задач. Так, например, Малкус и Веронис [1958] рассматривали задачу конвекции Бенара. Педловский [1967] определил реакцию ограниченного океана на поверхностный ветер, осциллирующий вблизи одной из волновых частот Россби. Келлер и Тин [1966] и Миллман и Келлер [1969] получили периодическое решение для различных систем, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных; Келлер и Миллман [1969] рассматривали распространение нелинейных электромагнитных и акустических волн. Радзяппа [1970] исследовал нелинейную неустойчивость Рэлея — Тэйлора.

3.2. Метод Лайтхилла

Сущность метода Лайтхилла заключается в разложении не только зависимой переменной $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \epsilon)$ по степеням малого параметра ϵ , но также и в разложении одной из независимых переменных, скажем x_1 , по степеням ϵ . Лайтхилл [1949a], [1961] ввел новую независимую переменную и затем разложил u и x_1 по степеням ϵ с коэффициентами, зависящими от s . Для первого приближения он предположил, что x_1 и s совпадают. Таким образом, Лайтхилл предположил следующие разложения для u и x_1 :

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (3.2.1)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (3.2.2)$$

Ясно, что прямое разложение (типа Пуанкаре) состоит только из (3.2.1), в котором s заменено на x_1 . Поскольку это прямое разложение не является равномерно пригодным, Лайтхилл ввел (3.2.2) и выбрал ξ_m (называемые растягивающими функциями) так, чтобы оба эти разложения стали равномерно пригодными; т. е. он выбрал ξ_m так, чтобы результирующее приближение было равномерно пригодным. В некоторых случаях это достигается, если потребовать, чтобы

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} \text{ и } \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \text{ были ограниченными.} \quad (3.2.3)$$

Другими словами, *высшие приближения не должны быть более сингулярными, чем первое.*

Сравнивая (3.2.1) и (3.2.2) с (3.1.2) и (3.1.4), мы видим, что метод Лайтхилла является обобщением метода растянутых параметров.

Го [1953], [1956] модифицировал этот метод, чтобы применить его к потоку вязкой жидкости. Поэтому Цянь Сюэ-сэнь [1956] назвал его методом ПЛГ, что значит метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го.

Этот метод применялся к ряду задач, преимущественно к задачам о распространении волн в средах без дисперсии. Лайтхилл [1949б] рассмотрел конические ударные волны в стационарном сверхзвуковом потоке. Уизэм [1952] определил картину ударных волн на осесимметричном снаряде в стационарном сверхзвуковом потоке, он же исследовал распространение сферических ударных волн в звездах [1953]. Легра [1951], [1953] и Ли и Шеппард [1966] применили этот метод к исследованию стационарного сверхзвукового обтекания тонкого крыла; Рао [1956] применил его к звуковым хлопкам¹). Хольт и Шварц [1963], Сакураи [1965], Хольт [1967] и Акинсет и Ли [1969] исследовали эффекты при схлопывании сферической каверны; Джасмен [1968] рассмотрел схлопывание сферической каверны, наполненной газом. Сирийяно и Крокко [1964] проанализировали неустойчивость горения, обусловленную химической кинетикой. Сэведж и Хасегава [1967] изучили затухание импульсов в металлах; Сакураи [1968] рассмотрел эффект импеданса плазмы в задаче обратного пинч-эффекта. Эйнауди [1969, 1970] применил тот же метод для описания распространения акустических гравитационных волн. Левак [1969] и Завадский и Левак [1971] решили уравнение Власова. Эспедал [1971] использовал сочетание этого метода с методом

¹) В работе Ф. Л. Черноусько [1961] при помощи метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го было исследовано отражение от центра, оси или плоскости симметрии сходящихся ударных волн, распространяющихся в газе переменной плотности. — *Прим. ред.*

сращения асимптотических разложений для определения эффекта ион-ионных столкновений в ионно-акустических импульсах в плазме.

Асано и Таниути [1969, 1970] и Асано [1970] перенесли этот метод на распространение волн в слабо неоднородной среде без дисперсии. Мельник [1965] применил его к энтропийному слою в окрестности конически симметричного крыла. Мак-Интайр [1966] исследовал задачу оптимального управления с разрывными управляющими функциями. Росс [1970] применил его к кинетике биохимических реакций при диффузии.

Баруа [1954] проанализировал вторичные потоки, вызванные вращением в ненагреваемой трубе; Мортон [1959] изучил ламинарную конвекцию в нагреваемой трубе; Моррис [1965] исследовал случай ламинарной конвекции в вертикальной трубе. Чан, Акинс и Банкофф [1966] проанализировали свободную конвекцию жидкого металла от однородно нагреваемой пластины.

Крейн [1959] сделал асимптотическое разложение для пограничных слоев равномерно пригодным. Гольдбург и Чен [1961] обсуждали аномалии, возникающие при применении этого метода и параболических координат к исследованию пограничного слоя на задней кромке. Окендон [1966] исследовал точки отрыва в ньютоновской теории гиперзвукового потока.

Поскольку метод Лайтхилла является обобщением метода растянутых параметров, то первый метод дает результаты, совпадающие с результатами, полученными при использовании второго метода, всегда, когда последний может быть применен. Поэтому ниже рассматриваются задачи, которые не могут быть исследованы методом растянутых параметров.

3.2.1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Первым примером, который исследовал Лайтхилл, было дифференциальное уравнение первого порядка

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + q(x) y = r(x), \quad y(1) = b > 0, \quad (3.2.4)$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — регулярные функции при всех рассматриваемых значениях x . Вазов [1955] нашел необходимые условия сходимости разложений Лайтхилла для этой задачи. Ашер [1971] исследовал необходимые условия применимости этого метода к уравнениям вида

$$y' = f(x, y) + \varepsilon g(x, y) + \dots$$

Камсток [1968] показал, что метод Лайтхилла может привести к ошибочным разложениям (см. упр. 3.28) для уравнения

$$(x^n + \varepsilon y) y' + nx^{n-1}y = mx^{m-1}, \quad y(1) = a > 1.$$

Бернсайд [1970] исследовал равномерность разложения, полученного растяжением переменной $z = x^n$ вместо x .

Ясно, что областью неравномерности является окрестность точки $x=0$. Для $\varepsilon=0$ уравнение (3.2.4) имеет решение вида

$$y = \left[\exp \int_0^x -\frac{q(t)}{t} dt \right] \left[\int_0^x \frac{r(t)}{t} \left(\exp \int_0^t \frac{q(\tau)}{\tau} d\tau \right) dt + c \right]. \quad (3.2.5)$$

Положим $q(0) = q_0$, тогда

$$\exp \int_0^x \frac{q(t)}{t} dt = x^{q_0} R(x), \quad (3.2.6)$$

где через $R(x)$ обозначена функция, регулярная при $x=0$. Поскольку $r(x)$ регулярна при $x=0$, то

$$y = R(x) + O(x^{-q_0}) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (3.2.7)$$

кроме тех случаев, когда q_0 — целое отрицательное число. В этом случае

$$y = R(x) + O(x^{-q_0} \ln x) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (3.2.8)$$

Из равенств (3.2.7) и (3.2.8) мы видим, что для нулевого приближения решение уравнения (3.2.4) ограничено или неограничено в зависимости от того, имеет ли место $q_0 < 0$ или $q_0 \geq 0$. Чтобы продемонстрировать детали описываемого метода, мы применим его для частного случая $q_0 = 2$.

Для этого рассмотрим следующую задачу, исследованную Лайтхиллом [1949а] и Цянь Сюэ-сэнем [1956]:

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1}, \quad (3.2.9)$$

где A — постоянная. Следуя Лайтхиллу, мы предположим, что

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m(s), \quad (3.2.10)$$

$$x = s + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(s). \quad (3.2.11)$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y'_m(s)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x'_m(s)}. \quad (3.2.12)$$

Чтобы учесть граничное условие, необходимо определить значение s , соответствующее $x=1$. Обозначим его через \tilde{s} . Таким

образом, мы пришли к уравнению

$$\tilde{s} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(\tilde{s}). \quad (3.2.13)$$

Разложим \tilde{s} по степеням ε

$$\tilde{s} = 1 + \varepsilon \tilde{s}_1 + \varepsilon^2 \tilde{s}_2 + \dots, \quad (3.2.14)$$

Подставив (3.2.14) в (3.2.13), разложив и приравняв коэффициенты при равных степенях ε , придем к равенству

$$\tilde{s} = 1 - \varepsilon x_1(1) - \varepsilon^2 [x_2(1) - x_1(1)x'_1(1)] + \dots \quad (3.2.15)$$

Граничное условие теперь может быть записано в виде

$$Ae^{-1} = y_0(1) + \varepsilon [y_1(1) - y'_0(1)x_1(1)] + \dots \quad (3.2.16)$$

или

$$y_0(1) = Ae^{-1}, \quad (3.2.17)$$

$$y_1(1) = y'_0(1)x_1(1). \quad (3.2.18)$$

Подставив (3.2.10)–(3.2.12) в (3.2.9), разложив и приравняв коэффициенты при ε^0 и ε к нулю, получим

$$sy'_0 + (2+s)y_0 = 0, \quad (3.2.19)$$

$$sy'_1 + (2+s)y_1 = -(2+s)y_0x'_1 - (y_0 + y'_0)x_1 - y_0y'_0. \quad (3.2.20)$$

Решение для y_0 имеет вид

$$y_0 = Ae^{-s}s^{-2}. \quad (3.2.21)$$

Поэтому (3.2.20) преобразуется к виду

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \frac{1}{s} \left[-(2+s)x'_1 + \frac{2}{s}x_1 + Ae^{-s}s^{-2} \left(\frac{2}{s} + 1 \right) \right]. \quad (3.2.22)$$

Если $x_1 = 0$, то уравнение (3.2.22) приведет к уравнению для членов первого порядка в прямом разложении, где y_1 более сингулярно при $x = 0$, чем y_0 . Действительно, $y_0 = O(x^{-2})$, в то время как $y_1 = O(x^{-5})$ при $x \rightarrow 0$. Чтобы сделать это разложение равномерно пригодным, x_1 можно выбрать так, чтобы y_1 было не более сингулярно, чем y_0 , обратив для этого в нуль правую часть уравнения (3.2.22). Однако Лайтхилл нашел, что равномерно пригодное разложение можно получить, выбрав x_1 так, чтобы устранить главную особенность. Поэтому мы положим

$$x'_1 - \frac{x_1}{s} = \frac{A}{s^3} \quad (3.2.23)$$

или

$$x_1 = -\frac{A}{3s^2}. \quad (3.2.24)$$

Тогда (3.2.22) примет вид

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{y_1}{y_0} \right] = -\frac{2A}{3s^3} - \frac{2A}{s^4} + Ae^{-s} \left(\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} \right), \quad (3.2.25)$$

следовательно,

$$y_1 = A^2 e^{-s} s^{-2} \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right]. \quad (3.2.26)$$

Растягивающая функция x_2 может быть найдена из условия устранения главной особенности в y_2 и будет в этом случае иметь вид

$$x_2 = -\frac{3A^2}{10s^4}. \quad (3.2.27)$$

Поэтому

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \left\{ 1 + Ae \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right] \right\} + O \left(\frac{\varepsilon^2}{s^6} \right), \quad (3.2.28)$$

где

$$x = s - \frac{\varepsilon A}{3s^2} - \frac{3\varepsilon^2 A^2}{10s^4} + O \left(\frac{\varepsilon^3}{s^6} \right). \quad (3.2.29)$$

Самое грубое приближение, равномерно пригодное вблизи нуля, имеет вид

$$y = Ae^{-s} s^{-2}, \quad (3.2.30)$$

где s — корень уравнения

$$x = s - \frac{\varepsilon A}{3s^2}, \quad (3.2.31)$$

который приближенно равен x , когда $x \geq 0$ и $\varepsilon \ll 1$. Предполагается, что это разложение начинается при положительном значении x , и требуется его продолжить в сторону уменьшения x через точку $x=0$. Для физических задач это продолжение прекратится, если до нуля найдется действительная точка ветвления s как функция от x . Точка ветвления дается условием $dx/ds=0$, что эквивалентно $x + \varepsilon y = 0$, а это является особенностью исходного уравнения (3.2.9). В этом случае точка ветвления дается выражением $s \approx (-2A\varepsilon/3)^{1/3}$, которое положительно тогда и только тогда, когда $A < 0$. Поэтому вышеприведенное разложение будет пригодным вплоть до нуля, если $A > 0$, и пригодно лишь до точки $x \approx (3/2)(-2A\varepsilon/3)^{1/3}$, если $A < 0$.

Если $A = 1$, то $x = 0$ соответствует значению

$$s = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/3} + \frac{9}{10} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{2/3} + O(\varepsilon). \quad (3.2.32)$$

Следовательно, при $x = 0$

$$y = \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2/3} - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{1/3} + O(1). \quad (3.2.33)$$

3.2.2. Одномерная задача о космическом корабле Земля — Луна

Одномерная задача о космическом корабле Земля — Луна (см. п. 2.4.2)¹ изучена Найфэ [1965а] и приведена к уравнению:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0. \quad (3.2.34)$$

Предположим, что

$$t = t_0(s) + \mu t_1(s) + O(\mu^2), \quad (3.2.35)$$

$$x = s + \mu x_1(s) + O(\mu^2). \quad (3.2.36)$$

Подставив (3.2.35) и (3.2.36) в (3.2.34) и приравняв коэффициенты при равных степенях μ , получим

$$2t_0'^2 = s, \quad t_0(0) = 0, \quad (3.2.37)$$

$$\frac{t_1'}{t_0'^3} = \frac{x_1'}{t_0'^2} + \frac{x_1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}, \quad t_1(0) = t_0'(0) x_1(0). \quad (3.2.38)$$

Решение уравнения (3.2.37) имеет вид

$$\sqrt{2}t_0 = \frac{2}{3}s^{3/2}. \quad (3.3.39)$$

Если $x_1 = 0$, то $t_1 = O[\ln(1-x)]$ при $x \rightarrow 1$. Особенность в t_1 может быть устранена, если правая часть уравнения (3.2.38) обратится в нуль, т. е.

$$\frac{x_1'}{t_0'^2} + \frac{x_1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} = 0. \quad (3.2.40)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1 = -1 + \frac{1}{2}s^{-1/2} \ln \frac{1+s^{1/2}}{1-s^{1/2}} - \frac{2}{3}s. \quad (3.2.41)$$

Поэтому для первого приближения

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}s^{3/2} + O(\mu), \quad (3.2.42)$$

¹ См. примечание на стр. 54.— Прим. ред.

где s — корень уравнения

$$x = s - \mu \left[1 - \frac{1}{2} s^{-1/2} \ln \frac{1+s^{1/2}}{1-s^{1/2}} + \frac{2}{3} s \right] + O(\mu^2). \quad (3.2.43)$$

3.2.3. Твердый цилиндр, равномерно расширяющийся в неподвижном воздухе

Рассмотрим далее решение задачи о цилиндрической ударной волне, вызванной цилиндрическим твердым телом, расширяющимся равномерно из нуля в невязком, нетеплопроводном и неподвижном воздухе. Эта задача также была рассмотрена Лайтхиллом. Предположим, что радиальная скорость расширения равна εa_0 , где a_0 — скорость звука в неподвижном воздухе и ε — малый параметр. Скачок распространяется с постоянной скоростью Ma_0 , где M — число Маха для скачка. Поток между цилиндром и ударной волной — адиабатический и изэнтропический, следовательно, он может быть описан с помощью потенциала $\varphi(r, t)$ (радиальная скорость $q = \varphi_r$), удовлетворяющего уравнению

$$a^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (3.2.44)$$

где a — местная скорость звука, связанная с a_0 уравнением Бернулли, т. е.

$$a^2 + (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] = a_0^2, \quad (3.2.45)$$

где γ — отношение удельной теплоемкости газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Газ предполагается совершенным с постоянными удельными теплоемкостями. Потенциал φ должен удовлетворять трем граничным условиям. Первое граничное условие: скорость воздуха на поверхности цилиндра равна скорости его расширения, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} (\varepsilon a_0 t) + \varepsilon a_0. \quad (3.2.46)$$

Вторым граничным условием будет условие непрерывности потенциала φ при переходе через ударную волну. Поскольку в покоем воздухе $\varphi = 0$, то

$$\varphi = (Ma_0 t) = 0. \quad (3.2.47)$$

Третьим условием будет соотношение Рэнкина — Гюгонио между скоростью ударной волны и скоростью воздуха за ней:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} (Ma_0 t) = \frac{2a_0 (M^2 - 1)}{M(\gamma + 1)}. \quad (3.2.48)$$

Поскольку задача не имеет характерного линейного размера, все характеристики потока являются функциями лишь от $r/a_0 t$. Положим

$$\varphi = a_0^2 t f(x), \quad x = \frac{r}{a_0 t}. \quad (3.2.49)$$

Тогда задача примет вид

$$\left[1 - x^2 + (\gamma + 1)x \frac{df}{dx} - (\gamma - 1)f - \frac{1}{2}(\gamma + 1) \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} \left\{ 1 + (\gamma - 1) \left[x \frac{df}{dx} - f - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (3.2.50)$$

Граничные условия примут вид

$$\frac{df}{dx}(\varepsilon) = \varepsilon, \quad (3.2.51)$$

$$f(M) = 0, \quad (3.2.52)$$

$$\frac{df}{dx}(M) = 2 \frac{M^2 - 1}{M(\gamma + 1)}. \quad (3.2.53)$$

Поскольку имеются три граничных условия, наложенные на дифференциальное уравнение второго порядка, то должно существовать соотношение между M и ε .

Так как ε мало, то f мало, следовательно, члены нулевого порядка в прямом разложении являются решением линейной части уравнения (3.2.50). Она имеет вид

$$(1 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} = 0. \quad (3.2.54)$$

Используя приведенные граничные условия, найдем, что

$$f = \varepsilon^2 \int_1^x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} dx, \quad M = 1. \quad (3.2.55)$$

Это приближенное решение не имеет физического смысла для $x > 1$, а число Маха распространяющейся ударной волны должно быть больше единицы.

Чтобы получить пригодное разложение при $x > 1$ и определить, насколько M превышает единицу, представляется удобным преобразовать уравнение второго порядка (3.2.50) в два уравнения первого порядка. Положим

$$\frac{df}{dx} = g. \quad (3.2.56)$$

Предположим, что имеют место следующие разложения:

$$\tilde{f} = \varepsilon^2 \tilde{f}_0 + \varepsilon^4 \tilde{f}_1 + \dots, \quad (3.2.57)$$

$$g = \varepsilon^2 g_0 + \varepsilon^4 g_1 + \dots, \quad (3.2.58)$$

$$x = s + \varepsilon^2 x_1(s) + \varepsilon^4 x_2(s) + \dots, \quad (3.2.59)$$

$$M = 1 + \varepsilon^2 M_1 + \varepsilon^4 M_2 + \dots. \quad (3.2.60)$$

Члены нулевого порядка определяются из уравнения (3.2.54) заменой x на s , т. е.

$$g_0 = \sqrt{\frac{1}{s^2} - 1}, \quad (3.2.61)$$

$$\tilde{f}_0 = \int_1^s g_0(\xi) d\xi.$$

Задача первого порядка имеет вид

$$(1-s^2)g'_1 + \frac{g_1}{s} - (1-s^2)g'_0 x'_1 + [-2sx_1 + (\gamma+1)sg_0 - (\gamma-1)f_0]g'_0 + \\ + \frac{g_0}{s}(\gamma-1)(sg_0 - f_0) - \frac{g_0 x_1}{s^2} = 0, \quad (3.2.62)$$

$$\tilde{f}'_1 = g_1 + g_0 x'_1. \quad (3.2.63)$$

При $s \rightarrow 1$ имеем $g_0 \rightarrow \sqrt{2(1-s)}$, $\tilde{f}_0 \rightarrow -\frac{2}{3}\sqrt{2}(1-s)^{3/2}$, следовательно, (3.2.62) примет вид

$$g_1 = \frac{-x_1}{\sqrt{2(1-s)}} + \gamma + 1 + O(\sqrt{1-s}) \text{ при } s \rightarrow 1. \quad (3.2.64)$$

Таким образом, g_1 не будет иметь особенности при $s=1$, только если $x_1=0$, и, следовательно, $g_1(1)=\gamma+1$.

Чтобы определить M_1 , используем краевое условие на ударной волне. Если \tilde{s} соответствует положению ударной волны $x=M$, то до порядка ε^2 будем иметь

$$\tilde{s} = 1 + \varepsilon^2 M_1 + \dots. \quad (3.2.65)$$

Граничное условие (3.2.53) дает

$$\varepsilon^2 g_0(1 + \varepsilon^2 M_1 + \dots) + \dots = \frac{4}{\gamma+1} \varepsilon^2 M_1 + \dots. \quad (3.2.66)$$

Подставив выражение для g_0 из (3.2.61) и приравняв коэффициенты при ε^2 , получим $M_1=0$. Следовательно,

$$\tilde{s} = 1 + \varepsilon^4 [M_2 - x_2(1)] + \dots. \quad (3.2.67)$$

Далее (3.2.52) и (3.2.57) дают

$$\tilde{f}_1(1) = 0. \quad (3.2.68)$$

Уравнение второго порядка для g_2 дает

$$g_2 = -\frac{2x_2 - (\gamma + 1)^2}{2\sqrt{2(1-s)}} + O(1) \text{ при } s \rightarrow 1. \quad (3.2.69)$$

Для устранения особенности в g_2 положим

$$x_2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)^2. \quad (3.2.70)$$

Следовательно, $\tilde{s} = 1 + \varepsilon^4 [M_2 - (\gamma + 1)^2/2]$, и с точностью до четвертого порядка граничное условие (3.2.53) дает

$$\sqrt{(\gamma + 1)^2 - 2M_2} + (\gamma + 1) = \frac{4M_2}{\gamma + 1}. \quad (3.2.71)$$

Решение этого уравнения имеет вид $M_2 = 3(\gamma + 1)^2/8$. Следовательно,

$$M = 1 + \frac{3}{8}(\gamma + 1)^2 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \quad (3.2.72)$$

Пэнди [1968] исследовал случай цилиндра, равномерно расширяющегося в неподвижной воде.

3.2.4. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла

В качестве четвертого примера применения метода Лайтхилла рассмотрим построение равномерно пригодного разложения в задаче о сверхзвуковом обтекании тонкого крыла, которая обсуждалась в п. 2.1.3. Прежде чем выписывать разложение, удобно преобразовать исходное уравнение второго порядка в систему двух уравнений первого порядка. Положим

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y.$$

Тогда уравнения (2.1.19)–(2.1.21) примут вид

$$v_y - B^2 u_x = M^2 [(\gamma + 1) u u_x + (\gamma - 1) u v_y + 2v v_x + \text{кубические члены}], \quad (3.2.73)$$

$$u_y = v_x, \quad (3.2.74)$$

$$\frac{v + \varepsilon T v_y + \dots}{1 + u + \varepsilon T u_y + \dots} = \varepsilon T'(x) \text{ при } y = 0, \quad (3.2.75)$$

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \text{ вверх по потоку.} \quad (3.2.76)$$

Прямое разложение для этой задачи было найдено в п. 2.1.3, но оно становится непригодным при $y \rightarrow \infty$. Поскольку u и v обращаются в нуль вверх по потоку, равномерно пригодное разложение может быть получено растягиванием исходящих харак-

теристик (т. е. $x - By = \text{const}$). Положим поэтому

$$u = \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.77)$$

$$v = \varepsilon v_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 v_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.78)$$

где

$$x - By = \xi + \varepsilon G_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 G_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.79)$$

$$y = \eta. \quad (3.2.80)$$

Растягивающие функции G_i можно определить, наложив условие, что разложения (3.2.77) и (3.2.78) должны быть равномерно пригодными для больших расстояний, т. е. u_2/u_1 и v_2/v_1 должны быть ограниченными. Показано, что это условие эквивалентно требованию, чтобы ξ было исходящей характеристикой нелинейных уравнений (Лайтхилл [1949a]; Уизэм [1952], [1953]; Линь [1954]; Фокс [1955]).

Поскольку характеристики уравнения (2.1.19) определяются уравнением

$$[1 - M^2(\gamma - 1)\varphi_x + \dots](dx)^2 + [2M^2\varphi_y + \dots]dx dy - [B^2 + M^2(\gamma + 1)\varphi_x + \dots](dy)^2 = 0, \quad (3.2.81)$$

уравнение для исходящих характеристик имеет вид

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\xi = \text{const}} = c, \quad (3.2.82)$$

где

$$c = B + \frac{M^2}{2B} \{ [B^2(\gamma - 1) + (\gamma + 1)]u - 2Bv \} + \dots \quad (3.2.83)$$

Уравнение (3.2.82) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = c \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (3.2.84)$$

Задача, таким образом, свелась к разложению зависимых переменных u и v , а также независимой переменной x как функций переменной $\eta = y$ и исходящей характеристики ξ по степеням ε . Таким образом, (3.2.79) эквивалентно разложению

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.85)$$

где

$$x_0 = \xi + B\eta \text{ и } x_i = G_i \text{ для } i \geq 1. \quad (3.2.86)$$

Для устранения произвола в параметризации необходимо задать начальное условие для x . Это условие принимается в виде

$$x(\xi, 0) = \xi. \quad (3.2.87)$$

Это эквивалентно такому выбору G_i , при котором они обращаются в нуль при $y = 0$.

Чтобы перейти от независимых переменных x и y к ξ и η , заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = x_{\xi} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = x_{\eta} \frac{\partial}{\partial x} + y_{\eta} \frac{\partial}{\partial y} = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь были учтены равенства (3.2.80) и (3.2.84). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{x_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{c}{x_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.2.88)$$

Подставляя (3.2.77), (3.2.78) и (3.2.85) в (3.2.73) — (3.2.76), (3.2.83), (3.2.84) и (3.2.87), используя (3.2.88) и приравнявая коэффициенты при равных степенях ε , получаем порядок ε

$$x_{0\xi} v_{1\eta} - (Bv_{1\xi} + B^2 u_{1\xi}) = 0, \quad (3.2.89)$$

$$x_{0\xi} u_{1\eta} - (Bu_{1\xi} + v_{1\xi}) = 0, \quad (3.2.90)$$

$$v_1(\xi, 0) = T'(\xi), \quad (3.2.91)$$

$$x_{1\eta} = \frac{M^2}{2B} \{ [B^2(\gamma - 1) + (\gamma + 1)] u_1 - 2Bv_1 \}, \quad (3.2.92)$$

$$x_1(\xi, 0) = 0. \quad (3.2.93)$$

Решение уравнений (3.2.89) — (3.2.91), которое обращается в нуль вверх по потоку, имеет вид

$$v_1 = T'(\xi), \quad u_1 = -B^{-1}T'(\xi), \quad (3.2.94)$$

что совпадает с линеаризованным решением. Таким образом, (3.2.92) примет вид

$$x_{1\eta} = -\frac{1}{2} M^4 (\gamma + 1) B^{-2} T'(\xi). \quad (3.2.95)$$

Решение этого уравнения, подчиненное условию (3.2.93), имеет вид

$$x_1 = -\frac{1}{2} M^4 (\gamma + 1) B^{-2} \eta T'(\xi). \quad (3.2.96)$$

Поэтому первый порядок равномерно пригодного разложения дается первыми членами в (3.2.77) и (3.2.78), где

$$x - By = \xi - \frac{1}{2} \varepsilon M^4 (\gamma + 1) B^{-2} y T'(\xi) + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.97)$$

в соответствии с (3.2.85), (3.2.86) и (3.2.96). Это решение показывает, что равномерно пригодное разложение первого порядка

для гиперболических систем уравнений есть просто линеаризованное решение, в котором линеаризованные характеристики заменены на характеристики, вычисленные при включении нелинейных членов первого порядка.

Тем же путем можно построить высшие приближения. Ли и Шеппард [1966] получили второе приближение.

В общей задаче потенциал скоростей ϕ не обращается в нуль вверх по потоку. В этом случае равномерно пригодное разложение можно получить разложением зависимой и обеих независимых переменных x и y как функций ϵ и обеих характеристик нелинейного уравнения ξ и η . Таким образом мы увеличим систему уравнений (3.2.83), (3.2.84) добавлением уравнений, описывающих приходящие характеристики η , и включением разложения для y , аналогичного (3.2.85). Ниже такая процедура будет показана на примере более общей системы гиперболических уравнений.

3.2.5. Разложения с использованием точных характеристик: нелинейные упругие волны

Для рассмотренных выше гиперболических дифференциальных уравнений равномерно пригодное разложение было получено растяжением одной из характеристик линеаризованного уравнения. Результирующая растянутая координата была лучшим приближением к точной характеристике. Линь [1954] и Фокс [1955] обобщили метод Лайтхилла для задач с гиперболическими дифференциальными уравнениями с двумя независимыми переменными, выбрав характеристические параметры в качестве независимых переменных. Эта процедура сводится к растяжению двух семейств характеристик. Таким образом они смогли рассмотреть общие волны в потоке жидкости, в котором исходящие и приходящие волны взаимодействуют.

Верхаген и Ван Вейнгарден [1965] применили этот метод к задаче о гидравлическом прыжке. Гиро [1965], Осватич [1965] и Циреп и Гейнатц [1965] применили его к газодинамическим волнам конечной амплитуды. Гретлер [1968] разработал косвенный метод расчета течения при плоском обтекании крыла, а Ван Вейнгарден [1968] проанализировал колебания в открытой трубе, близкие к резонансу. Чу и Йин [1963], Рем [1968] и Гендерсен [1967] рассмотрели термически возбуждаемые нелинейные одномерные колебания проводящей жидкости. Чу [1963] и Мортелл [1971] изучили автоколебания в трубе. Лик [1969] проанализировал распространение волн в изэнтропических, химически реагирующих сжимаемых жидкостях, а Лессер [1970] изучил распространение волн в неоднородной среде. Паркер и Варлей [1968] рассматривали нелинейное взаимодействие волн растяжения и

изгиба в упругих мембранах и струнах. Мортелл и Варлей [1971] исследовали нелинейные свободные колебания упругой панели. Ричмонд и Моррисон [1968] применили этот метод к осесимметричной задаче пластичности. Девисон [1968] получил разложение до второго порядка для нелинейных упругих волн в изотропной среде с использованием характеристик в качестве независимых переменных. Сейчас мы продемонстрируем этот метод на примере определения первого приближения для нелинейных упругих волн в анизотропной среде.

Пусть u и v — перемещения вдоль направлений x и y . Тогда

$$\rho u_{tt} = \sigma_x, \quad (3.2.98)$$

$$\rho v_{tt} = \tau_x, \quad (3.2.99)$$

где ρ — плотность материала. Положим $P = u_x$, $Q = v_x$ и предположим, что напряжения σ и τ являются полиномами от P и Q , такими, что

$$\begin{aligned} \sigma_P &\rightarrow \lambda + 2\mu, \quad \sigma_Q \rightarrow 0, \\ \tau_P &\rightarrow 0, \quad \tau_Q \rightarrow \mu \end{aligned} \quad (3.2.100)$$

при P и $Q \rightarrow 0$. Здесь λ и μ — коэффициенты Ламэ в линейной теории упругости. Таким образом,

$$\frac{\sigma}{\rho} = c_p^2 P + \frac{1}{2} a_1 P^2 + a_2 PQ + \frac{1}{2} a_3 Q^2 + \dots, \quad (3.2.101)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = c_s^2 Q + \frac{1}{2} b_1 P^2 + b_2 PQ + \frac{1}{2} b_3 Q^2 + \dots, \quad (3.2.102)$$

где

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.2.103)$$

Здесь c_p и c_s — скорости распространения продольных и поперечных волн. Полагая

$$R = u_t \quad \text{и} \quad s = v_t \quad (3.2.104)$$

и подставляя (3.2.101) и (3.2.102) в (7.2.98) и (3.2.99), получаем

$$R_t - c_p^2 P_x = \alpha P_x + \beta Q_x + \dots, \quad (3.2.105)$$

$$S_t - c_s^2 Q_x = \gamma P_x + \delta Q_x + \dots, \quad (3.2.106)$$

где

$$\alpha = a_1 P + a_2 Q, \quad \beta = a_2 P + a_3 Q, \quad (3.2.107)$$

$$\gamma = b_1 P + b_2 Q, \quad \delta = b_2 P + b_3 Q. \quad (3.2.108)$$

Поскольку $P = u_x$ и $Q = v_x$, то (3.2.104) дает

$$P_t = R_x, \quad Q_t = S_x. \quad (3.2.109)$$

Заметим, что мы представили систему двух дифференциальных уравнений второго порядка (3.2.98), (3.2.99) как систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка, которая является более удобной для применения метода растянутых координат.

Для окончательной формулировки задачи необходимо установить начальные условия. Мы рассмотрим случай, исследованный Девисоном [1968]. В этом случае в начальный момент времени материал, занимающий полупространство $x \geq 0$, покоится и находится в ненапряженном состоянии, а возмущение возникает в точке $x = 0$; т. е.

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \varepsilon \varphi(t), \quad Q(0, t) = \varepsilon \psi(t) \text{ при } t \geq 0, \\ P(x, 0) &= Q(x, 0) = R(x, 0) = S(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2.110)$$

$$\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0 \text{ при } t \leq 0, \quad (3.2.111)$$

где φ и ψ — известные функции, а ε — малая, но конечная безразмерная величина. Условие (3.2.111) означает, что вдоль приходящих характеристик P и Q обращаются в нуль. Чтобы получить равномерно пригодное разложение для этой задачи, мы разложим зависимые и независимые переменные как функции от ε и параметров исходящих характеристик ξ и η , т. е.

$$P = \varepsilon P_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 P_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.112)$$

$$Q = \varepsilon Q_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 Q_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.113)$$

$$R = \varepsilon R_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 R_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.114)$$

$$S = \varepsilon S_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 S_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.115)$$

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (3.2.116)$$

$$t = t_0(\xi, \eta) + \varepsilon t_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 t_2(\xi, \eta) + \dots. \quad (3.2.117)$$

Для членов первого порядка в разложениях P и Q характеристические волновые скорости могут быть определены из соотношений (3.2.105), (3.2.106) и (3.2.109) и определяются равенством

$$c = \pm \left(c_p + \frac{\alpha}{2c_p} \right), \quad \pm \left(c_s + \frac{\delta}{2c_s} \right). \quad (3.2.118)$$

Таким образом, с точностью до $O(P, Q)$ исходящие характеристики определяются из

$$x_\eta = c_1 t_\eta, \quad (3.2.119)$$

$$x_\xi = c_2 t_\xi, \quad (3.2.120)$$

где c_1 и c_2 — положительные скорости, определяемые соотношениями (3.2.118). Чтобы зафиксировать параметризацию, необходимо поставить начальные условия для x и t . Выберем эти усло-

вия в виде

$$x(\xi, \xi) = 0 \text{ и } t(\xi, \xi) = \xi. \quad (3.2.121)$$

Начальные условия (3.2.110), выраженные через новые независимые переменные, примут вид

$$\begin{aligned} P(\xi, \xi) &= \varepsilon \varphi(\xi), \quad Q(\xi, \xi) = \varepsilon \psi(\xi), \\ P(0, \eta) &= Q(\xi, 0) = R(0, \eta) = S(\xi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.122)$$

При переходе от независимых переменных x и t к ξ и η заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial t}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.2.123)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(\frac{1}{t_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{t_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{-1}{c_2 - c_1} \left(\frac{c_1}{t_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{c_2}{t_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right). \end{aligned} \quad (3.2.124)$$

Подставляя (3.2.112) — (3.2.117) в (3.2.105), (3.2.106), (3.2.109) и (3.2.118) — (3.2.122), используя (3.2.124) и приравнявая коэффициенты при равных степенях ε , получим

порядок ε^0

$$x_{0\eta} - c_p t_{0\eta} = 0, \quad (3.2.125)$$

$$x_{0\xi} - c_s t_{0\xi} = 0, \quad (3.2.126)$$

$$x_0(\xi, \xi) = 0, \quad t_0(\xi, \xi) = \xi, \quad (3.2.127)$$

порядок ε

$$-t_{0\eta}(c_p P_1 + R_1)_\xi + t_{0\xi}(c_s P_1 + R_1)_\eta = 0, \quad (3.2.128)$$

$$-t_{0\eta}(c_p Q_1 + S_1)_\xi + t_{0\xi}(c_s Q_1 + S_1)_\eta = 0, \quad (3.2.129)$$

$$-t_{0\eta}(c_p R_1 + c_p^2 P_1)_\xi + t_{0\xi}(c_s R_1 + c_s^2 P_1)_\eta = 0, \quad (3.2.130)$$

$$-t_{0\eta}(c_p S_1 + c_s^2 Q_1)_\xi + t_{0\xi}(c_s S_1 + c_s^2 Q_1)_\eta = 0, \quad (3.2.131)$$

$$(x_1 - c_p t_1)_\eta = \frac{1}{2} c_p^{-1} (a_1 P_1 + a_2 Q_1) t_{0\eta}, \quad (3.2.132)$$

$$(x_1 - c_s t_1)_\xi = \frac{1}{2} c_s^{-1} (b_2 P_1 + b_3 Q_1) t_{0\xi}, \quad (3.2.133)$$

$$x_1(\xi, \xi) = t_1(\xi, \xi) = 0, \quad (3.2.134)$$

$$\begin{aligned} P_1(\xi, \xi) &= \varphi(\xi), \quad Q_1(\xi, \xi) = \psi(\xi), \\ P_1(0, \eta) &= Q_1(\xi, 0) = R_1(0, \eta) = S_1(\xi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.135)$$

Решение задачи (3.2.125) — (3.2.127) имеет вид

$$x_0 = \frac{c_p c_s (\xi - \eta)}{c_p - c_s}, \quad t_0 = \frac{c_p \xi - c_s \eta}{c_p - c_s} \quad (3.2.136)$$

и является просто линеаризованными характеристиками

$$t_0 - \frac{x_0}{c_p} = \xi, \quad t_0 - \frac{x_0}{c_s} = \eta.$$

Подставив выражение для t_0 из (3.2.136) в уравнения (3.2.128) — (3.2.131) и решив полученные уравнения при условиях (3.2.135), получим

$$\begin{aligned} P_1(\xi, \eta) &= \varphi(\xi), & Q_1(\xi, \eta) &= \psi(\eta), \\ R_1(\xi, \eta) &= -c_p \varphi(\xi), & S_1(\xi, \eta) &= -c_s \psi(\eta), \end{aligned} \quad (3.2.137)$$

что является просто решением линеаризованной задачи без множителя ε . Подставив это решение в (3.2.132) и (3.2.133), получим

$$\begin{aligned} (x_1 - c_p t_1)_\eta &= \Gamma_1 a_1 \varphi(\xi) + \Gamma_1 a_2 \psi(\eta), \\ (x_1 - c_s t_1)_\xi &= \Gamma_2 b_2 \varphi(\xi) + \Gamma_2 b_3 \psi(\eta), \end{aligned} \quad (3.2.138)$$

где $(\Gamma_1, \Gamma_2) = -(1/2)(c_p - c_s)^{-1}(c_s/c_p, -c_p/c_s)$. Решение уравнений (3.2.138), подчиненное условию (3.2.134), имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 - c_p t_1 &= \Gamma_1 a_1 (\eta - \xi) \varphi(\xi) + \Gamma_1 a_2 \int_{\xi}^{\eta} \psi(\zeta) d\zeta, \\ x_1 - c_s t_1 &= \Gamma_2 b_2 \int_{\eta}^{\xi} \varphi(\zeta) d\zeta + \Gamma_2 b_3 (\xi - \eta) \psi(\eta). \end{aligned} \quad (3.2.139)$$

Поэтому равномерно пригодное разложение первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon \varphi(\xi) + O(\varepsilon^2), & R &= -\varepsilon c_p \varphi(\xi) + O(\varepsilon^2), \\ Q &= \varepsilon \psi(\eta) + O(\varepsilon^2), & S &= -\varepsilon c_s \psi(\eta) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.2.140)$$

где ξ и η определяются из равенств

$$\begin{aligned} x - c_p t &= -c_p \xi + \varepsilon \Gamma_1 \left[a_1 (\eta - \xi) \varphi(\xi) + a_2 \int_{\xi}^{\eta} \psi(\zeta) d\zeta \right] + O(\varepsilon^2), \\ x - c_s t &= -c_s \eta + \varepsilon \Gamma_2 \left[b_2 \int_{\eta}^{\xi} \varphi(\zeta) d\zeta + b_3 (\xi - \eta) \psi(\eta) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.2.141)$$

Как и в описанной в предыдущем разделе задаче о сверхзвуковом обтекании тонкого крыла, равномерно пригодное разложение до первого порядка есть просто линеаризованное решение, в ко-

тором линеаризованные характеристики заменены характеристиками, вычисленными с использованием нелинейных членов первого порядка.

Решение может быть непосредственно продолжено до высших порядков. В изотропном случае решение до второго порядка получили Девисон [1968] и Наир и Неммат-Нассер [1971] для однородных и неоднородных материалов соответственно.

3.3. Метод Темпла

Чтобы определить равномерно пригодное разложение для задачи

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \epsilon), \quad u(x_0) = u_0, \quad (3.3.1)$$

Темпл [1958], подобно тому, как это делал Лайтхилл, ввел новую независимую переменную s и предположил, что

$$u = u(s, \epsilon), \quad x = x(s, \epsilon). \quad (3.3.2)$$

Лайтхилл предполагал, что

$$u = u_0(s) + \epsilon u_1(s) + \epsilon^2 u_2(s) + \dots, \quad (3.3.3)$$

$$x = s + \epsilon x_1(s) + \epsilon^2 x_2(s) + \dots, \quad (3.3.4)$$

и выбирал x_i так, чтобы оба эти разложения были равномерно пригодными. Темпл же заменил исходное уравнение двумя эквивалентными уравнениями

$$\frac{du}{ds} = U(x, u, s, \epsilon), \quad \frac{dx}{ds} = X(x, u, s, \epsilon), \quad (3.3.5)$$

такими, чтобы U и X были регулярными по ϵ . Затем он нашел прямое возмущенное разложение для u и x . Таким образом, метод Темпла систематическим образом определяет x_i . Аналогичный подход использовали Уизэм, Лайтхилл, Фокс, Линь и Девисон. Он обсуждался ранее в случае гиперболических уравнений, где построение равномерно пригодных разложений достигалось разложением по одному или нескольким параметрам характеристик.

В качестве примера рассмотрим задачу

$$(x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = e^{-1}. \quad (3.3.6)$$

Этот пример обсуждался Темплом. Он является частным случаем задачи (3.2.9). Темпл заменил вышеприведенное уравнение на

$$s \frac{dx}{ds} = x + \epsilon y, \quad s \frac{dy}{ds} = -(2 + x)y. \quad (3.3.7)$$

Эти уравнения аналитичны по ϵ и обладают следующими разложениями:

$$y = s^{-2} e^{-s} \left[1 - \epsilon \int_1^s \varphi(t) dt \right] + O(\epsilon^2), \quad (3.3.8)$$

$$x = s [1 + \epsilon \varphi(s)] + O(\epsilon^2), \quad (3.3.9)$$

где

$$\varphi(s) = \int_1^s s^{-4} e^{-s} ds. \quad (3.3.10)$$

При $s \rightarrow 0$ имеем

$$x = s - \frac{1}{3} \epsilon s^{-2} + O(\epsilon^2 s^{-4}), \quad (3.3.11)$$

$$y = s^{-2} - \frac{1}{6} \epsilon s^{-4} + O(\epsilon^2 s^{-6}). \quad (3.3.12)$$

Следовательно, при $x=0$

$$y = \left(\frac{3}{\epsilon} \right)^{2/3} + O(\epsilon^{-1/3}), \quad (3.3.13)$$

что согласуется с выражением (3.2.33), полученным методом Лайтхилла.

3.4. Метод перенормировки

Притуло [1962] показал, что для определения равномерно пригодного возмущенного разложения для данной задачи нет необходимости вводить в дифференциальные уравнения преобразование (3.2.2) и затем определять ξ_n . Вместо этого можно выписать прямое разложение, выраженное через исходные переменные, и лишь затем ввести преобразование (3.2.2) в полученное прямое разложение. Чтобы сделать это разложение равномерно пригодным, мы наложим условие Лайтхилла, требующее, чтобы особенность не увеличивалась с ростом порядка приближения. Таким образом, для определения ξ_n мы получим не дифференциальные, а алгебраические уравнения, что упрощает всю процедуру. Однако Притуло предполагал, что коэффициенты ряда (3.2.1), за исключением, быть может, лишь u_0 , удовлетворяют линейным уравнениям, и утверждал, что при этом условии метод становится эффективным. Этот метод был вновь открыт Ашером [1968].

Метод, предложенный Притуло, примыкает к методу, описанному в п. 7.4.2, который впервые был применен в работе Рэлея

по рассеянию. Определив рассеяние в тонком слое, он придал ему вид экспоненты, чтобы сделать его пригодным для многих слоев.

Мы применим этот метод к некоторым примерам, рассмотренным ранее в этой книге, и сделаем полученные выше разложения равномерно пригодными.

3.4.1. Уравнение Дюффинга

Задача, которая будет сейчас рассмотрена, была сформулирована в п. 2.1.1, там же было построено прямое разложение, имеющее вид

$$u = a \cos t + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (3.4.1)$$

Равномерно пригодное разложение было получено в п. 3.1.1 с помощью метода Линдштедта—Пуанкаре.

Чтобы сделать разложение (3.4.1) равномерно пригодным, введем преобразование (3.1.2) в этот ряд. Разложив и собрав коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$u = a \cos s - \varepsilon \left[a \left(\omega_1 + \frac{3}{8} a^2 \right) s \sin s - \frac{1}{32} a^3 (\cos 3s - \cos s) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (3.4.2)$$

Вековые члены исчезнут, если

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} a^2. \quad (3.4.3)$$

Поэтому равномерно пригодное разложение имеет вид

$$u = a \cos s + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 (\cos 3s - \cos s) + O(\varepsilon^2), \quad (3.4.4)$$

где

$$t = s \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \right) + O(\varepsilon^2), \quad (3.4.5)$$

что соответствует соотношениям (3.1.15) и (3.1.16), полученным при использовании метода Линдштедта—Пуанкаре.

3.4.2. Модель слабо нелинейной неустойчивости

В качестве второго примера сделаем равномерно пригодным следующее прямое разложение:

$$u = \varepsilon \cos \sigma_1 t \cos kx + \varepsilon^3 \left(\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{члены, ограниченные при } t \rightarrow \infty \right), \quad (3.4.6)$$

полученное в п. 2.1.2 для модельной задачи (2.1.10), (2.1.11).

Положим

$$t = s(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots). \quad (3.4.7)$$

Подставив это выражение в (3.4.6) и разложив при малых ε , получим

$$u = \varepsilon \cos \sigma_1 s \cos kx + \varepsilon^3 \left[\left(\frac{9}{32\sigma_1} - \sigma_1 \omega_2 \right) s \sin \sigma_1 s \cos kx + \text{члены, ограниченные при } t \rightarrow \infty \right].$$

Вековые члены уничтожатся, если $\omega_2 = 9/32\sigma_1^2$. Поэтому равномерно пригодное разложение имеет вид

$$u = \varepsilon \cos \sigma t \cos kx + O(\varepsilon^3), \quad (3.4.8)$$

где

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1} \left[1 - \frac{9\varepsilon^2}{32(k^2 - 1)} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (3.4.9)$$

Если $k > 1$, то σ — действительное число, и разложение (3.4.8) пригодно до времен порядка $O(\varepsilon^{-2})$. В этом случае оно имеет вид стоячих волн с частотой, зависящей от амплитуды. Однако если $k < 1$, то σ — мнимое число, и (3.4.8) имеет вид растущих волн. Поскольку через короткий промежуток времени функция $\text{ch } \tilde{\sigma} t$, где $\tilde{\sigma}$ — действительное число, будет преобладать над $\text{ch } \sigma t$, то разложение (3.4.8) будет пригодным лишь для коротких промежутков времени. Из равенства (3.4.9) следует, что $\sigma \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$, и если $k - 1 = O(\varepsilon^2)$, то второй член в правой части (3.4.9) имеет тот же порядок, что и первый. Поэтому, хотя это разложение пригодно для широкого диапазона значений k , пригодность нарушается, как только $k - 1 = O(\varepsilon^2)$. В п. 3.5.1 показано, что применение метода растянутых параметров к построению разложения вблизи $k = 1$ приводит к ошибочным результатам. Разложение, пригодное вблизи $k = 1$, получено с использованием метода кратных масштабов в п. 6.2.8.

3.4.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла

В качестве третьего примера применения метода перенормировки сделаем равномерно пригодным прямое разложение для продольной компоненты скорости, полученное в п. 2.1.3 в случае сверхзвукового потока, обтекающего тонкое крыло. Согласно (2.1.36), прямое разложение имеет вид

$$\frac{u}{U} = 1 - \varepsilon \frac{T'(\xi)}{B} + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2(\xi) - \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{B^3} y T'(\xi) T''(\xi) - T(\xi) T''(\xi) \right] + O(\varepsilon^3). \quad (3.4.10)$$

Чтобы сделать его равномерно пригодным, положим

$$\xi = s + \varepsilon \xi_1(s, y) + O(\varepsilon^2). \quad (3.4.11)$$

Подставив это выражение в (3.4.10), разложив и собрав коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = 1 - \frac{\varepsilon T'(s)}{B} + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2(s) - \right. \\ \left. - T(s) T''(s) - \left(\xi_1(s, y) + \frac{\gamma+1}{2B^2} M^4 y T'(s) \right) \frac{T''(s)}{B} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Разложение может быть сделано равномерно пригодным для всех y , если выбрать

$$\xi_1(s, y) = -\frac{\gamma+1}{2B^2} M^4 y T'(s). \quad (3.4.13)$$

Поэтому равномерно пригодное разложение имеет вид

$$\frac{u}{U} = 1 - \varepsilon \frac{T'(s)}{B} + O(\varepsilon^2), \quad (3.4.14)$$

где

$$\xi = s - \varepsilon \frac{\gamma+1}{2B^2} M^4 y T'(s) + O(\varepsilon^2), \quad (3.4.15)$$

что полностью совпадает с формулами (3.2.94) и (3.2.97), полученными путем использования метода Лайтхилла.

3.4.4. Сдвиг особенности

В качестве четвертого примера рассмотрим задачу из п. 2.4.1. Прямое разложение, полученное в этом пункте, имеет вид

$$y = x^{-2} e^{-x} \left[1 + \varepsilon \int_1^x e^{-t} t^{-3} (1 + 2t^{-1}) dt \right] + O(\varepsilon^2). \quad (3.4.16)$$

Чтобы сделать его равномерно пригодным, положим в (3.4.16)

$$x = s + \varepsilon x_1(s) + \dots \quad (3.4.17)$$

Собрав коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$y = s^{-2} \left[1 - \frac{2\varepsilon}{s} \left(x_1 + \frac{1}{3} s^{-2} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \text{ при } s \rightarrow 0. \quad (3.4.18)$$

Это разложение будет равномерно пригодным, если выбрать

$$x_1 = -\frac{1}{3} s^{-2} \quad (3.4.19)$$

и удалить таким образом главную особенность. Поэтому равномерно пригодное разложение имеет вид

$$y = s^{-2}e^{-s} + O(\epsilon), \quad (3.4.20)$$

где

$$x = s - \frac{1}{3} \epsilon s^{-2} + O(\epsilon^2), \quad (3.4.21)$$

что полностью совпадает с (3.2.30) и (3.2.31), полученными методом Лайтхилла.

3.5. Ограничения метода растянутых координат

В предыдущих параграфах было показано, что метод растянутых координат является мощным средством для построения равномерно пригодных разложений в различных физических задачах. Однако, несмотря на успех при исследовании гиперболических дифференциальных уравнений для волн, распространяющихся в одном или в двух направлениях, этот метод не может быть применен для построения равномерно пригодных разложений эллиптических дифференциальных уравнений. Хотя Лайтхилл [1951] и получил равномерно пригодное разложение до второго порядка для обтекания несжимаемой жидкостью тонкого кругового крыла, Фокс [1953] нашла высшие приближения, которые не являются равномерно пригодными. Она доказала также, что для обтекания тонкого крыла сжимаемым газом не может быть получено равномерно пригодного разложения даже второго порядка. В связи с этим Лайтхилл [1961] в более поздней статье рекомендовал применять его метод только для гиперболических дифференциальных уравнений. Несмотря на это, Вальо-Лорен [1962] успешно применил этот метод в сочетании с методом интегральных соотношений в задаче о тупом теле (смешанная краевая задача). Более того, Эмануэль [1966] и Куйкен [1970] успешно применили этот метод к параболическим задачам, связанным с исследованием нестационарного турбулентного потока при диффузии и химических реакциях, а также потока вдоль наклонной поверхности, вызванного сильным впрыскиванием жидкости.

Следует упомянуть, что Хугстратен [1967] модифицировал этот метод применительно к задачам о дозвуковом обтекании тонкого крыла. Он ввел функцию, равномерно приближающую отображение физической плоскости на плоскость, в которой крыло представлено своей хордой.

Цянь Сюэ-сэнь [1956] высказал предположение, что ограниченность применения метода растянутых координат к исследованию задачи о тонком крыле объясняется тем, что разложения для функций выписываются вблизи нерегулярной точки. К счастью,

можно заметить, что особенности переносятся с зависимых переменных на растягивающие функции, и таким образом можно обнаружить неоднородность в результирующем разложении. Юнь [1968] разложил функцию вблизи нерегулярной особой точки, чтобы получить разложение, пригодное вблизи критического волнового числа, соответствующего разрыву струи, для нелинейной устойчивости жидкой цилиндрической струи. Однако результирующее разложение не имело особенности, хотя, как показал Найфэ [1970с], оно нарушалось при критическом волновом числе. Мы покажем трудности, с которыми столкнулся Юнь, на примере модельной задачи о слабо нелинейной неустойчивости стоячих волн (п. 3.5.1).

Как показал Леви [1959], метод растянутых координат непригоден для класса задач с сингулярными возмущениями, в которых малый параметр стоит при высших производных (п. 3.5.2). Он показал, что этот метод приводит к ошибочным результатам в задаче о цилиндрических ударных волнах. Тем не менее можно показать, что растяжение зависимых вместо независимых переменных приводит к равномерно пригодному разложению (упражнение 3.33).

Несмотря на то что этот метод дает равномерно пригодные разложения для периодических решений в слабо нелинейных колебательных системах, Найфэ [1966] показал, что эти разложения не содержат никакой информации, кроме предельных циклов и предельных точек. Вообще, если амплитуда изменяется, то метод растянутых координат неприменим.

Мы покажем трудности метода растянутых координат на следующих примерах.

3.5.1. Пример слабо нелинейной неустойчивости

Как было показано в п. 3.4.2, разложение (3.4.9) для σ становится непригодным, если $k-1=O(\varepsilon^2)$. Чтобы применить метод растянутых параметров к этому разложению, положим в (3.4.9)

$$k = \alpha + \varepsilon^2 k_2. \quad (3.5.1)$$

Тогда, раскладывая (3.4.9) для малых ε и собирая коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - 1} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{\frac{9}{32} - \alpha k_2}{\alpha^2 - 1} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (3.5.2)$$

Чтобы коэффициент при ε^2 был не более сингулярным, чем первый член при $\alpha \rightarrow 1$, положим $k_2 = 9/32$. Тогда (3.5.2) примет вид

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - 1} \left[1 + \frac{9\varepsilon^2}{32(\alpha + 1)} \right] + \dots, \quad (3.5.3)$$

что ограничено при $\alpha \rightarrow 1$. Нейтральная устойчивость соответствует $\sigma = 0$, т. е. $\alpha = 1$, или, согласно (3.5.1),

$$k = 1 + \frac{9}{32} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.5.4)$$

Чтобы показать непригодность разложения (3.5.3), достаточно показать непригодность условия нейтральной устойчивости (3.5.4). Конфигурация системы при нейтральной устойчивости по определению не зависит от времени, следовательно, она определяется уравнением

$$u_{xx} + u = -u^3. \quad (3.5.5)$$

Положим

$$u = \varepsilon \cos kx + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos nkx, \quad A_n = O(\varepsilon^2).$$

Подставив это выражение в (3.5.5) и приравняв коэффициент при $\cos kx$ к нулю, получим

$$k^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 + \dots$$

Следовательно,

$$k = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \dots, \quad (3.5.6)$$

что отличается от (3.5.4). Поэтому разложения (3.5.3) и (3.5.4) неверны. Верное разложение, пригодное вблизи $k = 1$, получено в п. 6.2.8 с помощью метода кратных масштабов.

3.5.2. Малый параметр при высшей производной

Леви [1959] показал, что применение метода растянутых координат к задаче о цилиндрической ударной волне (приведенной в упражнении 2.3) приводит к некорректным результатам. Толщина ударной волны, которую нашел Ву [1956], не зависела от величины скачка, что противоречило результату, полученному Леви с помощью топологического анализа. Вместо того чтобы показывать непригодность разложения на примере цилиндрической ударной волны, мы, следуя Леви, обсудим более простую задачу, обладающую теми же особенностями, но имеющую точное решение для сравнения. Уравнение имеет вид

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -xy - 1, \quad (3.5.7)$$

где ε — малое положительное число. Точное решение этого уравнения, проходящее через точку (x_0, y_0) , имеет вид

$$y = y_0 e^{(x_0^2 - x^2)/2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon} \int_{x_0}^x e^{t^2/2\varepsilon} dt. \quad (3.5.8)$$

Прямое разложение метода возмущений можно получить, положив

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x). \quad (3.5.9)$$

Подставив (3.5.9) в (3.5.7), приравняв коэффициенты при равных степенях ε и решив полученные уравнения, придем к решению

$$y = -x^{-1} - \varepsilon x^{-3} - \dots - 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \varepsilon^n x^{-2n-1} - \dots \quad (3.5.10)$$

Можно проверить, что (3.5.10) является асимптотическим разложением точного решения (3.5.8) при больших x . Заметим, что это разложение становится непригодным вблизи $x=0$, потому что первый член сингулярен, а члены высших порядков все более и более сингулярны. Если $x = O(\varepsilon^{1/2})$, то все члены этого разложения имеют порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$. Таким образом, это разложение никогда не будет адекватным разложением в области $x = O(\varepsilon^{1/2})$.

Чтобы применить метод растянутых координат к этой задаче, в разложении (3.5.10) положим

$$x = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \dots, \quad (3.5.11)$$

разложим полученное равенство по ε при малых ε и соберем коэффициенты при равных степенях ε . Растягивающие функции затем выбираем так, чтобы члены высших порядков были не более сингулярны, чем первый. В данной задаче это приводит к уничтожению всех членов, за исключением первого. В результате имеем

$$y = -\frac{1}{s}, \quad (3.5.12)$$

где

$$x = s + \frac{\varepsilon}{s} + \frac{\varepsilon^2}{s^3} + \dots + \frac{a_n \varepsilon^n}{s^{2n-1}} + \dots, \quad (3.5.13)$$

$$a_{2m} = (4m-2) \left[\sum_{r=0}^{m-2} a_{2m-1-r} a_{r+1} + \frac{1}{2} a_m^2 \right], \quad m \geq 2, \quad (3.5.14)$$

$$a_{2m+1} = 4m \sum_{r=0}^{m-1} a_{2m-r} a_{r+1}, \quad m \geq 1.$$

Из последних соотношений следует, что

$$a_n > 2^{n-2} (n-1)!, \quad n > 2. \quad (3.5.15)$$

Поэтому разложение (3.5.13) расходится; фактически оно является „более“ расходящимся, чем (3.5.10), и теряет смысл, когда x подходит к $O(\varepsilon^{1/2})$. Все, что достигнуто, — это замена не-

пригодного разложения по одной переменной на непригодное разложение по другой переменной. Причина непригодности полученного разложения заключается в отбрасывании высшей производной, что мало сказывается при больших x , но становится существенным, когда x приближается к области $O(\epsilon^{1/2})$.

3.5.3. Задача о космическом корабле Земля — Луна

Ниже мы покажем, что применение метода растянутых координат к двумерной задаче о космическом корабле Земля — Луна (введенной в п. 2.4.2) приводит к непригодным разложениям. Чтобы сделать разложение (2.4.17) и (2.4.18) равномерно пригодным, применим метод растянутых координат. Подставив

$$x = s + \mu x_1(s) + \dots \quad (3.5.16)$$

в это разложение, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t = & \frac{1}{\rho^3} \sin^{-1} \rho \sqrt{s} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{s(1-\rho^2 s)} + \\ & + \mu \left[\sqrt{\frac{s}{1-\rho^2 s}} x_1 - \frac{2}{\rho^3} \sin^{-1} \rho \sqrt{s} + \frac{2-\rho^2}{\rho^2(1-\rho^2)} \sqrt{\frac{s}{1-\rho^2 s}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(1-\rho^2)^{3/2}} \ln \frac{1+(1-2\rho^2)s+2\sqrt{(1-\rho^2)(1-\rho^2 s)s}}{1-s} \right] + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Растягивающая функция x_1 выбирается так, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, было не более сингулярно, чем первый член, если $s \rightarrow 1$. Таким образом,

$$x_1 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \ln(1-s). \quad (3.5.18)$$

Здесь растягивающую функцию можно было бы выбрать так, чтобы выражение, стоящее в скобках, обратилось в нуль. В результате получим разложение первого порядка

$$\sqrt{2}t = \frac{1}{\rho^3} \sin^{-1} \rho \sqrt{s} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{s(1-\rho^2 s)} + O(\mu^2), \quad (3.5.19)$$

$$y = -\mu cs + O(\mu^2), \quad (3.5.20)$$

где

$$x = s - \frac{1}{2} \frac{\mu}{1-\rho^2} \ln(1-s) + O(\mu^2). \quad (3.5.21)$$

Сравнивая это разложение с точным решением, Найфэ (1965a) показал, что оно дает отклоняющуюся траекторию вблизи Луны, хотя разложение, полученное в одномерном случае, достаточно хорошо согласуется с точным решением. В одномерном случае имеет место особенность при $x = 1 + \mu/(1-\rho^2) + O(\mu^2)$, которая

находится вне интересующей нас области $0 \leq x \leq 1$. В прямом разложении особенность сдвигается в точку $x = 1$, и растяжение x перемещает особенность из точки $x = 1$ в правильное положение. Однако в двумерном случае имеет место резкое изменение в направлении движения космического корабля в окрестности Луны, и растяжение порядка $O(\mu)$ не может компенсировать такое резкое изменение.

Упражнения

3.1. Рассмотреть задачу

$$\ddot{u} + u = \varepsilon u^2, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

(а) Определить прямое разложение второго порядка (три члена) и исследовать его равномерность.

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка (два члена), используя метод растянутых параметров, и сравнить результат с п. (б).

3.2. (а) Показать, что свободное движение точечной массы вдоль параболы $x^2 = 2pz$, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω , описывается уравнением

$$\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{p^2} + \left(\frac{g}{p} - \omega^2\right)x = 0.$$

(б) Определить двучленное прямое разложение для малых амплитуд и исследовать его равномерность.

(в) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

г) Построить одночленное равномерно пригодное разложение помощью метода растянутых параметров и сравнить результат с п. (в).

3.3. Определить двучленное равномерно пригодное разложение при малых амплитудах для решения уравнения

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

описывающего колебания маятника.

3.4. Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для периодического решения уравнения

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u},$$

заметив, что амплитуда не произвольна.

3.5. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для периодического решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= \varepsilon(1 - z)\dot{u}, \\ \tau \dot{z} + z &= u^2, \end{aligned}$$

где τ — постоянная.

3.6. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^2 + k \cos \omega t.$$

Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для периодических решений, если

- (а) $\omega_0 \approx 2\omega$ (указание: положить $\omega_0 = 2\omega + \varepsilon\sigma$ и $u = u_0 + \varepsilon u_1 \dots$, где $u_0 = a \cos(2\omega t + \beta) + (1/3) h \omega^{-2} \cos \omega t$, затем определить a и β из уравнения для u_1);
 (б) $\omega_0 \approx \omega/2$ (a в этом случае произвольно).

3.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^3 + k \cos \omega t.$$

Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для периодических решений, если (а) $\omega_0 \approx 3\omega$ и (б) $\omega_0 \approx \omega/3$.

3.8. Определить разложения второго порядка для нечетных решений, соответствующих переходным кривым уравнения

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0,$$

где δ близко к 1 или к 4.

3.9. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta u}{1 + \varepsilon \cos 2t} = 0.$$

(а) Построить разложения второго порядка для переходных кривых вблизи $\delta = 0, 1, 4$ (Шень [1959]).

(б) Используя метод Уиттекера, построить разложение второго порядка для u вблизи этих кривых.

3.10. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta - \varepsilon \cos^2 t}{1 - \varepsilon \cos^2 t} u = 0.$$

(а) Определить разложения второго порядка для первых трех переходных кривых (Рэнд и Дзен, [1969]) (т. е. вблизи $\delta = 0, 1$ и 4).

(б) Используя метод Уиттекера, найти u вблизи этих кривых.

3.11. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos^3 t) u = 0.$$

Определить разложения второго порядка для первых трех переходных кривых, используя метод растянутых параметров и метод Уиттекера.

3.12. Определить с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическое решение уравнения (Малхолланд [1971])

$$\ddot{u} + \ddot{u} + \dot{u} + u = (1 - u^2 - \dot{u}^2 - \ddot{u}^2) (\ddot{u} + \dot{u}).$$

3.13. Построить разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon u^3,$$

подчиненное условиям: (а) $u(0) = u(\pi) = 0$ и (б) $u(t) = u(t + 2\pi)$.

3.14. Определить разложение первого порядка для системы уравнений

$$\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon (\sin 2t + u^2) u, \\ u(t) = u(t + 2\pi).$$

3.15. Построить разложения первого порядка для задач

$$(a) \quad \ddot{u} + \lambda u = \varepsilon t u, \\ u t = u(t + 2\pi).$$

$$(b) \quad \ddot{u} + \lambda u = \varepsilon (\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t) u, \\ u(t) = u(t + 2\pi).$$

3.16. Определить разложение первого порядка периодического решения при малых амплитудах для системы уравнений

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x + g(1 - \cos \theta) - (l + x) \dot{\theta}^2 = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l + x} \sin \theta + \frac{2}{l + x} \dot{x} \dot{\theta} = 0,$$

которая описывает колебания качающейся пружины длиной l . k — постоянная, $\omega_1^2 = k/m \approx 4\omega_2^2 = 4g/l$.

3.17. Свободные колебания шарнирно закрепленной балки на упругом основании описываются краевой задачей

$$u_{xxxx} + \gamma u + \varepsilon \gamma u^3 + u_{tt} = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = a \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

где γ , a и ε — постоянные. Построить разложения до $O(\varepsilon)$ для частоты колебаний (Хан [1965]).

3.18. Продолжить разложения из п. 3.1.4 и 3.1.5 до второго порядка.

3.19. Рассмотреть решение следующего уравнения в виде однородных распространяющихся волн

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u^3.$$

Решения искать в виде $u = a \exp i(kx - \omega t) +$ высшие гармоники. Определить сдвиг частоты и волнового числа.

3.20. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{xxxx} = \varepsilon u^3, \\ u(x, 0) = a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

(а) Построить прямое разложение первого порядка.

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, применив метод перенормировки.

(в) Определить разложение, пригодное для $t = O(\varepsilon^{-1})$, используя метод растянутых параметров.

(г) Показать, что частота становится непригодной вблизи $k = 1$.

(д) Удалить особенность, применив метод перенормировки к этой частоте.

(е) Показать, что в результате получится ошибочное разложение.

3.21. Рассмотреть задачу на собственные значения

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \lambda \varphi = \varepsilon x^2 \varphi, \\ \varphi(x, 0) = \varphi(x, \pi) = \varphi(0, y) = \varphi(\pi, y) = 0.$$

Построить разложение первого порядка, если λ близко к 2 или к 5.

3.22. Рассмотреть задачу

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = \varepsilon f(x, y, z) \varphi,$$

где φ обращается в нуль на поверхности куба со стороной π . Построить разложения первого порядка, если $\lambda \approx 3$ или 6, если (а) $f = x^2$ и (б) $f = x^2 y$.

3.23. Поперечные свободные колебания шарнирно закрепленной балки приводят к краевой задаче

$$EI w_{xxxx} - Tw_{xx} + \rho w_{tt} = 0, \\ T = \frac{ES}{2l} \int_0^l (w_x)^2 dx, \\ w(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \\ w(x, 0) = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_t(x, 0) = 0,$$

где E , I , ρ , S , a и l — постоянные. Построить разложение первого порядка для малых амплитуд (Ивенсен [1968]).

3.24. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y) y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$$

(а) Построить прямое разложение второго порядка. Какова область неоднородности?

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(в) Построить разложение первого порядка (два члена по y и три члена по x), используя метод Лайтхилла, и сравнить его с разложением, найденным в п. (б).

(г) Найти точное решение, поменяв ролями зависимую и независимую переменные, и сравнить с решениями, найденными в п. (б) и (в).

3.25. Показать, что равномерно пригодное разложение для задачи

$$(x + \varepsilon y) y' + xy = be^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}$$

имеет вид

$$y = e^{-\xi} (b \ln \xi + 1) + O(\varepsilon),$$

где $x = \xi - \varepsilon (b \ln \xi + b + 1) + O(\varepsilon^2)$.

3.26. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y) y' - \frac{1}{2} y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1.$$

(а) Построить прямое разложение второго порядка и исследовать его равномерность.

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(в) Получить разложение первого порядка, используя метод Лайтхилла, и сравнить результат с п. (б).

3.27. Используя метод перенормировки, сделать разложение из упражнения 2.12 равномерно пригодным.

3.28. Рассмотреть задачу

$$(x^n + \varepsilon y) y' + nx^{n-1}y - mx^{m-1} = 0, \\ y(1) = a > 1.$$

(а) Показать, что точное решение имеет вид

$$x^n y + \frac{1}{2} \varepsilon y^2 = x^m + \left(a + \frac{1}{2} \varepsilon a^2 - 1 \right).$$

(б) Показать, что применение метода Лайтхилла дает

$$y \sim y_0 = (\varepsilon^m + a - 1) \xi^{-n}, \\ x = \xi - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \xi (y_0^2 - a^2)}{(n-m) \xi^m + n(a-1)} + O(\varepsilon^2).$$

(в) Показать, что приближенное решение непригодно вблизи $x=0$, за исключением некоторых значений m и n (Камсток [1968]).

(г) Ввести новую переменную $z = x^n$ в исходную задачу и затем, растянув z , построить приближенное решение для y . Определить условия, при которых новое разложение будет пригодным вблизи начала координат (Бернсайд [1970]). Исходя из этого, определить роль замены независимой переменной в превращении приближенного решения в равномерно пригодное.

3.29. Рассмотреть задачу

$$(1 + \varepsilon u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = \varepsilon \varphi(x).$$

(а) Определить прямое разложение первого порядка при $\varepsilon \ll 1$ и исследовать его равномерность.

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(в) Построить разложение первого порядка, используя метод Лайтхилла, и сравнить результат с п. (б).

3.30. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_x u_{xx}, \\ u(0, t) = \varepsilon \varphi(t), \quad \varphi(t) = 0 \text{ при } t \leq 0, \\ u(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq 0.$$

(а) Построить прямое разложение первого порядка и сделать его „равномерно пригодным“, используя метод перенормировки.

(б) Определить разложение первого порядка, используя метод Лайтхилла, и сравнить с п. (а). Показать, что перенормировка u вместо u_x приводит к неверным результатам.

3.31. Рассмотреть задачу (Лайтхилл [1949а]):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n}{x+y} u = u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad u = v, \\ u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \\ u(0, y) = \varepsilon \varphi(y) y^{-n}, \quad 0 < n < 1,$$

где $\varphi(0) = 0$. Показать, что равномерно пригодное разложение первого порядка имеет вид

$$u = \varepsilon \varphi(\eta) (x + \eta)^{-n} + O(\varepsilon^2),$$

$$y = \eta - \frac{\varepsilon \varphi(\eta) (x + \eta)^{1-n}}{1-n} + O(\varepsilon^2).$$

3.32. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \varepsilon u_x u_{xx},$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c(g'(x) - f'(x)),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные функции x .

(а) Определить прямое разложение первого порядка. Можно ли сделать его равномерно пригодным, используя метод перенормировки?

(б) Получить разложение первого порядка, используя метод растянутых координат.

3.33. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y' + y = 1, \quad y(1) = 1.$$

(а) Показать, что метод Лайтхилла не дает равномерно пригодного разложения.

(б) Показать, что растяжение y вместо x дает равномерно пригодное разложение

(в) Исследовать, может ли растяжение y' дать равномерно пригодное разложение для

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0,$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

3.34. Рассмотреть задачу

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u, \dot{u}).$$

(а) Показать, что метод растянутых координат (МРК) приводит к

$$u = a \sin \varphi + O(\varepsilon), \quad \varphi = s + c,$$

где

$$t = s + \varepsilon t_1(s) + \dots,$$

$$at_1'' = \alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \varphi, a \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi,$$

$$2at_1' = \beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \varphi, a \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi.$$

(б) Показать, что $\alpha = 0$ и β — постоянная, такая, что $t_1 = (1/2) \beta a^{-1} s + \text{const.}$

(в) Исходя из этого показать, что МРК дает только предельные циклы или предельные точки для этой задачи (Найфэ [1966]).

Метод сращивания асимптотических разложений и составные разложения

Результаты § 3.5 показывают, что с помощью метода растянутых координат нельзя получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных зависимые переменные испытывают резкие изменения. В таких случаях, как правило, прямые разложения становятся непригодными в указанных областях, и почти тождественные преобразования независимых переменных (растянутые координаты) не могут компенсировать этих резких изменений. Чтобы получить равномерно пригодные разложения, мы должны выяснить и использовать тот факт, что эти резкие изменения характеризуются увеличенными масштабами, отличными от характерных масштабов изменения зависимых переменных вне областей резких изменений.

Один из методов, связанных с этой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания. Этот метод называется методом внешних и внутренних разложений, или, по Брезертону [1962], методом сращивания (сшивки) асимптотических разложений.

Другой метод построения равномерно пригодных разложений основан на предположении, что каждая зависимая переменная является суммой, состоящей из: 1) части, характеризующейся исходными независимыми переменными, и 2) частей, характеризующихся увеличенными независимыми переменными, причем каждой области резких изменений отвечает своя часть в этой сумме. Это является простейшей формой метода составных разложений.

В последующем параграфе мы опишем метод сращивания асимптотических разложений. За более подробной библиографией и приложениями этого метода мы отсылаем читателя к следующим работам: Ван Дайк [1964], Вазов [1965], Коул [1968] и

О'Малли [19686]. Кэрриер [1970] сделал обзор применений этого метода в геофизике, а Жермену [1967] принадлежит обзор его применений в аэродинамике.

4.1. Метод сращивания асимптотических разложений

4.1.1. Введение: метод Прандтля

Чтобы описать метод сращивания асимптотических разложений, рассмотрим простую краевую задачу

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad (4.1.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (4.1.2)$$

введенную в п. 2.2.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (4.1.1) приводится к виду

$$y' + y = 0. \quad (4.1.3)$$

Это уравнение является уравнением первого порядка и не может, вообще говоря, удовлетворить общим граничным условиям (4.1.2). Следовательно, одно из этих граничных условий должно быть опущено. В п. 4.1.2 будет показано, что должно быть опущено условие $y(0) = \alpha$. Это можно видеть также и из точного решения (2.2.7).

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то при фиксированном $x \neq 0$

$$y \rightarrow \beta e^{1-x}, \quad (4.1.4)$$

что является решением предельного уравнения (4.1.3), подчиненным условию $y(1) = \beta$. Решение предельного уравнения обозначим через y^0 и будем называть *внешним решением*. При малых ε решение предельного уравнения близко к точному решению (2.2.7) всюду, за исключением малого интервала возле конечной точки $x=0$, где точное решение быстро изменяется так, чтобы удовлетворить краевому условию $y(0) = \alpha$, которое было почти потеряно. Этот малый интервал, в котором y очень сильно изменяется, называется *пограничным слоем* в механике жидкости, областью *краевого эффекта* в механике твердого тела и *поверхностным слоем* в электродинамике.

Чтобы определить разложение, пригодное в пограничном слое, мы увеличим этот слой, введя преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.1.5)$$

Определение подходящего преобразования растяжения будет обсуждено ниже в этой главе. После этого преобразования уравнение (4.1.1) примет вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} + \varepsilon y = 0, \quad (4.1.6)$$

и при фиксированном ξ приводится к

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} = 0, \quad (4.1.7)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = A + Be^{-\xi}, \quad (4.1.8)$$

где A и B — постоянные. Так как это решение пригодно в пограничном слое, то оно пригодно в начале координат и, следовательно, должно удовлетворять краевому условию $y(x=0) = \alpha$. Поскольку $\xi=0$ соответствует $x=0$, то $y(\xi=0) = \alpha$; следовательно, $B = \alpha - A$, и выражение (4.1.8) примет вид

$$y = A + (\alpha - A)e^{-\xi}. \quad (4.1.9)$$

Это выражение содержит одну произвольную постоянную A . Обозначим это решение через y^i и назовем его *внутренним решением* или *внутренним разложением*.

Чтобы определить A , заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \beta\varepsilon. \quad (4.1.10)$$

Кроме того, из (4.1.5) следует, что любое малое фиксированное значение x_0 соответствует $\xi \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} y^i = A. \quad (4.1.11)$$

Таким образом, эти пределы представляют собой одно и то же значение y при очень малом значении $x = x_0 \neq 0$. Следовательно,

$$A = \beta\varepsilon. \quad (4.1.12)$$

Поэтому

$$y^i = \beta\varepsilon + (\alpha - \beta\varepsilon)e^{-\xi}. \quad (4.1.13)$$

При определении внешнего и внутреннего разложений мы использовали два различных предельных процесса: *внешний предел*, определяемый

$$y^o = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ фиксировано}}} y(x; \varepsilon), \quad (4.1.14)$$

и *внутренний предел*

$$y^i = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \xi \text{ фиксировано}}} y(\varepsilon\xi; \varepsilon). \quad (4.1.15)$$

Процесс определения A называется срачиванием. Мы использовали следующее условие срачивания:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o(x; \varepsilon) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} y^i(\xi; \varepsilon), \quad (4.1.16)$$

что эквивалентно равенству

внутреннего предела внешнего решения, обозначенного через $(y^o)^i$, внешнему пределу внутреннего решения, обозначенному через $(y^i)^o$. (4.1.17)

Приближенное решение исходной задачи дается (4.1.4) для x вне окрестности нуля и (4.1.13) для x , близких к $x=0$. Чтобы вычислить y как функцию от x , необходимо при возрастании x переключиться с одного решения на другое при некотором малом значении x , например при таком x , когда оба решения могут пересечься. Это переключение неудобно, и поэтому из этих двух решений мы построим одно равномерно пригодное решение, называемое *составным решением* и обозначаемое через y^c . Оно имеет вид (Эрдейи [1961])

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o. \quad (4.1.18)$$

Поскольку

$$((y^o)^i)^o = (y^o)^i = (y^i)^o = ((y^i)^o)^i,$$

то

$$\begin{aligned} (y^c)^o &= y^o + (y^i)^o - (y^o)^i = y^o, \\ (y^c)^i &= (y^o)^i + y^i - (y^i)^o = y^i. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Таким образом, составное решение является хорошим приближением во внешней области как внешнее решение и во внутренней области как внутреннее решение. Это наводит на мысль, что составное решение является равномерным приближением на всем интервале изменения x , включая промежуток между внешней и внутренней областями. Успех срачивания обусловлен наличием общей области, в которой как внешнее, так и внутреннее решение пригодны, и, следовательно, между этими областями нет пробела.

Сложив (4.1.4) и (4.1.13) и вычтя $\beta\varepsilon$, равное $(y^o)^i = (y^i)^o$, в силу (4.1.17), получим

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta\varepsilon) e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (4.1.20)$$

Метод, рассматриваемый в этом пункте, был развит Прандтлем [1905] для решения задачи обтекания тела потоком вязкой жидкости при больших скоростях. Функция тока, описывающая двумерное обтекание тела, должна удовлетворять уравнению в частных производных четвертого порядка. Для вязкой жид-

кости как нормальная, так и тангенциальная компоненты скорости на поверхности тела должны обратиться в нуль. Последнее условие называется условием прилипания, потому что любая незначительная вязкость заставляет жидкость прилипать к телу. Если вязкость обращается в нуль, то уравнение для функции тока приводится к уравнению третьего порядка (п. 2.2.2) и, следовательно, не может удовлетворить всем граничным условиям. Поскольку невязкая жидкость может проскальзывать, то условие прилипания опускается, и в результате решение будет представлять движение жидкости всюду, кроме малой области вблизи тела, называемой *пограничным слоем Прандтля*. В этой области тангенциальные компоненты скорости изменяются очень сильно от значения, полученного из предельного уравнения (с вязкостью, равной нулю), до нуля, чтобы удовлетворить краевому условию прилипания, которое ранее было опущено. Для описания течения в этой области Прандтль увеличил ее, введя преобразование растяжения, оценил порядок величины различных членов исходного дифференциального уравнения и отбросил малые члены. Полученные таким образом уравнения были решены, и их решения были сращены с решением задачи для невязкой жидкости с использованием условия сращивания (4.1.16).

Аналогичную процедуру сращивания использовали Рэлей [1912], Ганс [1915], Джеффри [1924], Вентцель [1926], Крамерс [1926] и Бриллюэн [1926] для соединения приближенных разложений с различных сторон от точки ветвления (ср. п. 7.3.1).

Аналогичные методики применялись в девятнадцатом столетии: 1) Лапласом [1805] для решения задач о большой невесомой капле на плоскости и о широком мениске; 2) Максвеллом [1866] для решения задачи о крутильных колебаниях круглых дисков, вращающихся между близкими фиксированными дисками; 3) Кирхгофом [1877] для решения задачи о конденсаторе, состоящем из двух различно заряженных конечных круглых дисков.

4.1.2. Высшие приближения и усовершенствованные процедуры сращивания

Спустя годы многие исследователи расширили и обобщили метод Прандтля. В их числе можно назвать таких ученых, как Вейль [1942], Фридрихс [1942], Дородницын [1947], Латта [1951], Каплун [1954], [1957], [1967], Каплун и Лагерстром [1957], Праудман и Пирсон [1957], Вишик и Люстерник [1957], Васильева [1959], [1963] и Ван Дайк [1964]¹⁾. Процедуру сращивания фор-

¹⁾ Обзор работ и библиографию по методу Вишика—Люстерника и его приложениям см. в обзорной статье В. А. Треногина [1970], а по асимптотическим методам в теории обыкновенных дифференциальных уравнений — в обзорной статье В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой и М. В. Федорюка [1969]. — *Прим. ред.*

мализовали Васильева [1959], [1963], Ван Дайк [1964] и Каплун и Лагерстром [1957]. Кэрриер [1953], [1954] на частных примерах сравнил метод растянутых координат и метод сращивания асимптотических разложений.

В этом пункте мы определим высшие приближения для задачи (4.1.1) и (4.1.2). Начнем с выяснения вопроса, какое краевое условие можно опустить, и попутно найдем соответствующее преобразование растяжения. Затем найдем внешнее и внутреннее разложения и срастим их, используя условие Ван Дайка. В конце мы построим равномерно пригодное составное разложение.

Какое краевое условие должно быть опущено? Как отмечалось в предыдущем пункте, если ε обращается в нуль, то (4.1.1) приводится к уравнению первого порядка (4.1.3), решение которого не может одновременно удовлетворить двум краевым условиям $y(0) = \alpha$ и $y(1) = \beta$, и, следовательно, одно из них должно быть опущено. В окрестности того конца, где краевое условие опускается, y изменяется очень быстро и выходит на заданное граничное значение. Такое поведение y сильно отличается от поведения решения предельного уравнения. Эта малая область называется *пограничным слоем*, или *областью неоднородности*.

Чтобы выяснить, должно ли быть опущено краевое условие $y(1) = \beta$, введем следующее преобразование растяжения:

$$\xi = (1-x)\varepsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (4.1.21)$$

Тогда уравнение (4.1.1) преобразуется к виду

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\lambda} \frac{dy}{d\xi} + y = 0. \quad (4.1.22)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (4.1.22) будет принимать различные предельные формы в зависимости от λ .

Случай $\lambda > 1$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0 \quad \text{или} \quad y^i = A + B\xi. \quad (4.1.23)$$

Поскольку предполагалось, что решение предельного уравнения (4.1.3) пригодено при $x=0$, то

$$y^o = \alpha e^{-x} \quad (\text{внешнее решение}). \quad (4.1.24)$$

Условие сращивания (4.1.16) требует, чтобы

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (A + B\xi) = \lim_{x \rightarrow 1} \alpha e^{-x}$$

или

$$B = 0 \quad \text{и} \quad A = \alpha e^{-1}. \quad (4.1.25)$$

Следовательно,

$$y^i = \alpha e^{-1}. \quad (4.1.26)$$

Поскольку это решение пригодно при $x=1$, то оно должно удовлетворять краевому условию $y(x=1) = \beta$, следовательно,

$$\beta = \alpha e^{-1}, \quad (4.1.27)$$

что, вообще говоря, не верно. Мы отбросим этот случай, поскольку он не приводит к удовлетворению обоих граничных условий.

Случай $\lambda < 1$

$$\frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{или} \quad y^i = A = \beta. \quad (4.1.28)$$

Этот случай должен быть отброшен, так как он не может удовлетворить условию сращения.

Случай $\lambda = 1$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{или} \quad y^i = A + B e^\xi. \quad (4.1.29)$$

Из условия сращения следует

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} (A + B e^\xi) &= \lim_{x \rightarrow 1} \alpha e^{-x}, \\ B &= 0 \quad \text{и} \quad A = \alpha e^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Таким образом, этот случай также должен быть отброшен, поскольку краевое условие $y(x=1) = \beta$ приводит к (4.1.27).

Таким образом, пограничный слой не может существовать в окрестности $x=1$, и, следовательно, краевое условие в этой точке нельзя опустить.

Чтобы исследовать вопрос, можно ли опустить краевое условие $y(0) = \alpha$, введем преобразование растяжения

$$\xi = x e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (4.1.31)$$

тогда уравнение (4.1.1) примет вид

$$e^{1-2\lambda} \frac{d^2y}{d\xi^2} + e^{-\lambda} \frac{dy}{d\xi} + y = 0. \quad (4.1.32)$$

В этом случае также существуют три предельные формы этого уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ в зависимости от λ .

Случай $\lambda > 1$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = 0 \quad \text{или} \quad y^i = A + B \xi. \quad (4.1.33)$$

Случай $\lambda < 1$

$$\frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{или} \quad y^i = A. \quad (4.1.34)$$

Случай $\lambda = 1$

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} = 0, \quad y^i = A + B e^{-\zeta}. \quad (4.1.35)$$

Первые два случая должны быть отброшены по причинам, которые были рассмотрены выше. Третий же случай при использовании краевого условия $y(0) = \alpha$ дает внутреннее решение

$$y^i = A + (\alpha - A) e^{-\zeta}. \quad (4.1.36)$$

Условие сращивания требует

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [A + (\alpha - A) e^{-\zeta}] = \lim_{x \rightarrow 0} (\beta e^{1-x}), \quad \text{или } A = \beta e, \quad (4.1.37)$$

откуда

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e) e^{-\zeta}. \quad (4.1.38)$$

Таким образом, пограничный слой существует в окрестности точки $x = 0$, и краевое условие $y(0) = \alpha$ не может быть наложено на предельное уравнение (4.1.3). Попутно мы нашли преобразование растяжения

$$\zeta = x e^{-1}, \quad (4.1.39)$$

которое использовалось в (4.1.5). Следовательно, область неоднородности имеет вид

$$x = O(\varepsilon). \quad (4.1.40)$$

Внешнее разложение. Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^o(x; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n y_n(x) + O(\varepsilon^N). \quad (4.1.41)$$

Используя внешний предельный переход

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad x \text{ фиксировано}, \quad (4.1.42)$$

имеем

$$y_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) \\ x \text{ фиксировано}$$

и

$$y_m(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y - \sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon^n y_n(x)}{\varepsilon^m}. \quad (4.1.43) \\ x \text{ фиксировано}$$

Чтобы определить это разложение, подставим (4.1.41) в (4.1.1) и приравняем коэффициенты при равных степенях ε . Получим

$$y'_0 + y_0 = 0, \quad (4.1.44)$$

$$y'_n + y_n = -y''_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.1.45)$$

Как было отмечено в предыдущем пункте, это внешнее решение пригодно всюду, за исключением области $x = O(\varepsilon)$. Следовательно, оно должно удовлетворять краевому условию $y^o(1) = \beta$, которое вместе с (4.1.41) приводит к

$$y_0(1) = \beta, \quad y_n(1) = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (4.1.46)$$

Решение уравнения (4.1.44), подчиненное условию $y_0(1) = \beta$, имеет вид

$$y_0 = \beta e^{1-x}. \quad (4.1.47)$$

Решение уравнения (4.1.45) при $n = 1$, подчиненное условию $y_1(1) = 0$, имеет вид

$$y_1 = \beta(1-x)e^{1-x}. \quad (4.1.48)$$

Поэтому

$$y^o = \beta[1 + \varepsilon(1-x)]e^{1-x} + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.49)$$

Внутреннее разложение. Чтобы построить разложение, пригодное вблизи начала координат, применим преобразование растяжения (4.1.39) и преобразуем (4.1.1) к виду

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \frac{dy^i}{d\xi} + \varepsilon y^i = 0. \quad (4.1.50)$$

Будем искать внутреннее разложение в виде

$$y^i(x; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n Y_n(\xi) + O(\varepsilon^N), \quad (4.1.51)$$

используя *внутренний предельный процесс*

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \xi = x\varepsilon^{-1} \text{ фиксировано.} \quad (4.1.52)$$

Таким образом,

$$Y_0(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(\varepsilon\xi; \varepsilon),$$

ξ фиксировано

$$Y_m(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(\varepsilon\xi; \varepsilon) - \sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon^n Y_n(\xi)}{\varepsilon^m}. \quad (4.1.53)$$

ξ фиксировано

Чтобы определить это разложение, подставим (4.1.51) в (4.1.50), приравняем коэффициенты при равных степенях ε и, учитывая, что ξ — независимая переменная, получим

$$Y_0'' + Y_0' = 0, \quad (4.1.54)$$

$$Y_n'' + Y_n' = -Y_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.1.55)$$

Хотя это внутреннее разложение и удовлетворяет краевому условию при $x=0$, но, вообще говоря, не предполагается, что оно удовлетворит краевому условию при $x=1$. Поскольку $x=0$ соответствует $\xi=0$, краевое условие $y(x=0)=\alpha$ вместе с (4.1.51) дает

$$Y_0(0)=\alpha, \quad Y_n(0)=0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (4.1.56)$$

Решение уравнения (4.1.54), подчиненное условию $Y_0(0)=\alpha$, имеет вид

$$Y_0 = \alpha - A_0(1 - e^{-\xi}). \quad (4.1.57)$$

Решение задачи (4.1.55), (4.1.56) при $n=1$ имеет вид

$$Y_1 = A_1(1 - e^{-\xi}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\xi})]\xi. \quad (4.1.58)$$

Поэтому

$$y^i = \alpha - A_0(1 - e^{-\xi}) + \varepsilon \{A_1(1 - e^{-\xi}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\xi})]\xi\} + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.59)$$

Это внутреннее разложение содержит произвольные постоянные A_0 и A_1 , которые должны определиться при сращивании с внешним решением (4.1.49).

Усовершенствованная процедура сращивания. Простейшая форма сращивания внутреннего и внешнего решений — это условие Прандтля:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \lim_{\xi \rightarrow \infty} y^i. \quad (4.1.60)$$

Это условие приводит к сращиванию первых членов внешнего и внутреннего разложений и дает

$$A_0 = \alpha - \beta\varepsilon. \quad (4.1.61)$$

Легко видеть, что это условие сращивания не может быть использовано при сращивании других членов. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \beta\varepsilon(1 + \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (4.1.62a)$$

в то время как

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} y^i = \alpha - A_0 + \varepsilon[A_1 - (\alpha - A_0)\xi] + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.62b)$$

Поскольку в силу условия сращивания (4.1.60) оба эти разложения должны совпадать для всех значений ζ , то

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = \beta e \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right). \quad (4.1.63)$$

Это нарушает предположение, что $A_1 = O(1)$, которое было использовано при выписывании разложения (4.1.59).

Более общая формулировка условия сращивания имеет вид
внутренний предел (внешнего предела) равен
внешнему пределу (внутреннего предела). (4.1.64)

Еще более общая форма условия сращивания имеет вид

внутреннее разложение (внешнего разложения) равно
внешнему разложению (внутреннего разложения). (4.1.65)

Соответствующие разложения строятся с использованием внешнего и внутреннего предельных процессов, определяемых (4.1.41) — (4.1.43) и (4.1.51) — (4.1.53) соответственно. Ван Дайк [1964] предложил следующее условие сращивания:

m -членное внутреннее разложение (n -членного внешнего разложения) равно
 n -членному внешнему разложению (m -членного внутреннего разложения), (4.1.66)

где m и n — два произвольных целых числа, которые могут быть равны или не равны. Чтобы определить m -й член внутреннего разложения (n -го члена внешнего разложения), перепишем первые n членов внешнего разложения и выразим их через внутреннюю переменную, затем разложим их для малых ε при фиксированном значении внутренней переменной до m членов. Аналогично получаем правую часть (4.1.66). Условие сращивания Ван Дайка широко используется благодаря своей простоте. Более общее и строгое условие предложил Каплун [1967], который использовал промежуточные пределы. Френкель [1969] сравнил эти условия сращивания и пришел к выводу, что хотя условие сращивания Ван Дайка и может быть некорректно, но оно проще в употреблении, чем принцип наложения Каплуна.

Условие сращивания Ван Дайка. Чтобы показать действие условия сращивания Ван Дайка, мы применим его к сращиванию внешнего разложения (4.1.49) с внутренним разложением (4.1.59), взяв $m = n = 1$; $m = 1$, $n = 2$; $m = n = 2$.

Для сращивания одночленного внешнего разложения с одночленным внутренним разложением будем действовать следующим образом.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \beta e^{1-x}$. (4.1.67a)

Выразим через внутреннюю переменную: $= \beta e^{1-\varepsilon \zeta}$. (4.1.67б)

Разложим при малых ε : $=\beta\varepsilon(1-\varepsilon\zeta+\dots)$. (4.1.67в)

Одночленное внутреннее разложение: $=\beta\varepsilon$. (4.1.67г)

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta})$. (4.1.68а)

Выразим через внешнюю переменную:

$$= \alpha - A_0(1 - e^{-x/\varepsilon}). \quad (4.1.68б)$$

Разложим при малых ε : $=\alpha - A_0$. (4.1.68в)

Одночленное внешнее разложение: $=\alpha - A_0$. (4.1.68г)

Приравняв (4.1.67г) и (4.1.68г) в соответствии с условием сращения (4.1.66), получим

$$\beta\varepsilon = \alpha - A_0 \text{ или } A_0 = \alpha - \beta\varepsilon. \quad (4.1.69)$$

Теперь срастим одночленное внешнее разложение с двучленным внутренним разложением. Положим $m=1$ и $n=2$. Имеем

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \beta e^{1-x}$. (4.1.70а)

Выразим через внутреннюю переменную: $=\beta e^{1-\varepsilon\zeta}$. (4.1.70б)

Разложим при малых ε : $=\beta\varepsilon\left(1-\varepsilon\zeta+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta^2+\dots\right)$. (4.1.70в)

Двучленное внутреннее разложение: $=\beta\varepsilon(1-\varepsilon\zeta)$. (4.1.70г)

Двучленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \varepsilon\{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})\zeta]\}$. (4.1.71а)

Выразим через внешнюю переменную: $=\alpha - A_0(1 - e^{-x/\varepsilon}) + \varepsilon\left\{A_1(1 - e^{-x/\varepsilon}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-x/\varepsilon})]\frac{x}{\varepsilon}\right\}$. (4.1.71б)

Разложим при малых ε : $=(\alpha - A_0)(1 - x) + \varepsilon A_1$. (4.1.71в)

Одночленное внешнее разложение: $=(\alpha - A_0)(1 - x)$. (4.1.71г)

Приравняв (4.1.70г) и (4.1.71г) в соответствии с условием сращения (4.1.66), получим

$$\beta\varepsilon(1-\varepsilon\zeta) = (\alpha - A_0)(1 - x). \quad (4.1.72а)$$

Поскольку $x = \varepsilon\zeta$, то

$$\alpha - A_0 = \beta\varepsilon \text{ или } A_0 = \alpha - \beta\varepsilon. \quad (4.1.72б)$$

Таким образом, мы не получили никакой информации относительно A_1 .

Положив $m=n=2$ в (4.1.66), получим

Двучленное внешнее разложение: $y \sim \beta[1 + \varepsilon(1 - x)]e^{1-x}$. (4.1.73а)

Выразим через внутреннюю переменную: $=\beta[1 + \varepsilon(1 - \varepsilon\zeta)]e^{1-\varepsilon\zeta}$. (4.1.73б)

Разложим при малых ε : $=\beta\varepsilon(1 + \varepsilon - \varepsilon\zeta + \dots)$. (4.1.73в)

Двучленное внутреннее разложение: $=\beta\varepsilon(1 + \varepsilon - \varepsilon\zeta)$. (4.1.73г)

Двучленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \varepsilon\{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})\zeta]\}$. (4.1.74а)

Выразим через внешнюю переменную: $=\alpha - A_0(1 - e^{-x/\varepsilon}) + \varepsilon\left\{A_1(1 - e^{-x/\varepsilon}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-x/\varepsilon})]\frac{x}{\varepsilon}\right\}$. (4.1.74б)

Разложим при малых ε : $= (\alpha - A_0)(1-x) + \varepsilon A_1$. (4.1.74в)

Двучленное внешнее разложение: $= (\alpha - A_0)(1-x) + \varepsilon A_1$. (4.1.74г)

Приравняв (4.1.73г) и (4.1.74г) в соответствии с условием сращения (4.1.66), получим

$$A_0 = \alpha - \beta\varepsilon, \quad A_1 = \beta\varepsilon. \quad (4.1.75)$$

Поэтому

$$y^i = \beta\varepsilon + (\alpha - \beta\varepsilon)e^{-\xi} + \varepsilon \{ \beta\varepsilon(1 - e^{-\xi}) - [\beta\varepsilon - (\alpha - \beta\varepsilon)e^{-\xi}] \xi \} + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.76)$$

Составное разложение. Как обсуждалось выше, внешнее разложение непригодно в окрестности начала координат, в то время как внутреннее разложение, вообще говоря, непригодно нигде, кроме области $x = O(\varepsilon)$. Чтобы найти разложение, пригодное на всем интервале, построим составное разложение y^c (Васильева [1959]; Эрдейи [1961])

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o. \quad (4.1.77)$$

Эти два выражения эквивалентны в силу условия сращения (4.1.66), требующего, чтобы

$$(y^o)^i = (y^i)^o. \quad (4.1.78)$$

А поскольку

$$(y^i)^i = y^i, \quad (y^o)^o = y^o, \quad (4.1.79)$$

то (4.1.77) приводит к

$$(y^c)^o = y^o \text{ и } (y^c)^i = y^i. \quad (4.1.80)$$

Поэтому y^c будет таким же хорошим приближением для y , как y^o во внешней области и как y^i во внутренней области.

Поскольку как (4.1.73г), так и (4.1.74г) определяет $(y^o)^i$, то составное разложение можно получить, прибавив к внешнему разложению (4.1.49) внутреннее разложение (4.1.76) и вычтя внутреннее разложение внешнего разложения (4.1.74г). Таким образом, получим

$$y^c = \beta [1 + \varepsilon(1-x)] e^{1-x} + [(\alpha - \beta\varepsilon)(1+x) - \varepsilon\beta\varepsilon] e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.81)$$

4.1.3. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

В этом пункте мы построим равномерно пригодное разложение первого порядка для решения задачи

$$\varepsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (4.1.82)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (4.1.83)$$

где $\varepsilon \ll 1$, $a(x)$ и $b(x)$ — аналитические в интервале $[0, 1]$ функции от x . Уравнение (4.1.1), которое обсуждалось в двух предыдущих пунктах, можно записать в виде (4.1.82), положив $a(x) = b(x) \equiv 1$. Если ε обращается в нуль, то уравнение (4.1.82) приводится к уравнению первого порядка

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (4.1.84)$$

решение которого не может удовлетворить обоим краевым условиям, и, следовательно, одно из них должно быть опущено. Как будет показано ниже, ответ на вопрос, какое условие должно быть опущено, зависит от того, какой знак принимает $a(x)$ на интервале $[0, 1]$. Если $a(x) > 0$, то необходимо опустить условие $y(0) = \alpha$ и внутреннее разложение строить в окрестности точки $x = 0$, сращивая его с внешним разложением. Если $a < 0$, то надо опустить условие $y(1) = \beta$ и строить внутреннее разложение вблизи точки $x = 1$, сращивая его с внешним разложением. Однако если $a(x)$ меняет знак в $[0, 1]$, то y может изменить характер с осциллирующего на экспоненциально растущий или выродиться в окрестности нуля $a(x)$. Такие нули называются *точками поворота* или *точками ветвления*. Задача о точках ветвления исследуется в § 7.3.

Какое краевое условие должно быть опущено? Чтобы исследовать вопрос, может ли быть опущено условие $y(0) = \alpha$ (т. е. образуется ли пограничный слой в окрестности нуля), введем преобразование растяжения

$$\xi = x\varepsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (4.1.85)$$

Тогда (4.1.82) примет вид

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\lambda} a(\varepsilon^\lambda \xi) \frac{dy}{d\xi} + b(\varepsilon^\lambda \xi) y = 0. \quad (4.1.86)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ (4.1.86) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\xi^2} &= 0 \text{ при } \lambda > 1, \\ \frac{dy}{d\xi} &= 0 \text{ при } \lambda < 1, \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} + a(0) \frac{dy}{d\xi} &= 0 \text{ при } \lambda = 1. \end{aligned} \quad (4.1.87)$$

Чтобы можно было срастить решение уравнения (4.1.87) с внешним решением, определяемым предельным уравнением (4.1.84), необходимо, чтобы существовали решения уравнения (4.1.87), ограниченные при $\xi \rightarrow \infty$. Ограниченными решениями в первых двух случаях будут постоянные, следовательно, они должны быть отброшены как приводящие к определенным противоречиям, анало-

гичным тем, с которыми мы столкнулись в п. 4.1.2. Аналогично, если $a(0) < 0$, то ограниченным решением в последнем случае (т. е. при $\lambda = 1$) будет также лишь постоянная, и этот случай надо будет также отбросить. Следовательно, в точке $x = 0$ не будет пограничного слоя. Если $a(0) > 0$, то общее решение при $\lambda = 1$ имеет вид

$$y^i = A + Be^{-a(0)\xi}. \quad (4.1.88)$$

Это решение ограничено при $\xi \rightarrow \infty$ и содержит две произвольные постоянные, следовательно, оно может быть принято за внутреннее разложение, так как вместе с решением предельного уравнения может удовлетворить обоим краевым условиям.

Чтобы исследовать, должно ли быть опущено условие $y(1) = \beta$, введем преобразование растяжения

$$\eta = (1-x)\varepsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (4.1.89)$$

и преобразуем (4.1.82) к виду

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\eta^2} - \varepsilon^{-\lambda} a(1 - \varepsilon^\lambda \eta) \frac{dy}{d\eta} + b(1 - \varepsilon^\lambda \eta) = 0. \quad (4.1.90)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\eta^2} &= 0 \quad \text{при } \lambda > 1, \\ \frac{dy}{d\eta} &= 0 \quad \text{при } \lambda < 1, \\ \frac{d^2 y}{d\eta^2} - a(1) \frac{dy}{d\eta} &= 0 \quad \text{при } \lambda = 1. \end{aligned} \quad (4.1.91)$$

Решением уравнения (4.1.91), ограниченным при $\eta \rightarrow \infty$, будет постоянная, если $\lambda \neq 1$ или если $a(1) > 0$ и $\lambda = 1$, и, следовательно, эти случаи надо отбросить. Однако, если $a(1) < 0$ при $\lambda = 1$, общее решение (4.1.91) имеет вид

$$y^i = A + Be^{a(1)\eta}. \quad (4.1.92)$$

Это решение ограничено при $\eta \rightarrow \infty$, следовательно, оно может быть принято в качестве внутреннего разложения, так как оно содержит две произвольные постоянные, которые позволяют сочетать его с внешним решением и удовлетворить обоим краевым условиям.

Таким образом, пограничный слой будет при

$$x = 0, \quad \text{если } a(x) > 0,$$

и при

$$x = 1, \quad \text{если } a(x) < 0. \quad (4.1.93)$$

Далее мы определим равномерно пригодное разложение первого порядка для первого случая.

Случай $a(x) > 0$. В этом случае первый член внешнего разложения (4.1.41) определяется из уравнения

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(1) = \beta. \quad (4.1.94)$$

что приводит к

$$y^o = \beta \exp \left[- \int_1^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right]. \quad (4.1.95)$$

Общее решение для первого члена внутреннего разложения (4.1.51) дается (4.1.88). После преобразования (4.1.85) краевое условие $y(x=0) = \alpha$ преобразуется к виду $y(\xi=0) = \alpha$, следовательно,

$$y^i = \alpha - B + Be^{-a(0)\xi}. \quad (4.1.96)$$

Чтобы ссратить y^o и y^i , мы положим $m=n=1$ в (4.1.66). Имеем

одночленное внутреннее разложение (одночленного

$$\text{внешнего разложения}) = \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right], \quad (4.1.97)$$

одночленное внешнее разложение (одночленного
внутреннего разложения) $= \alpha - B$.

$$(4.1.98)$$

Приравняв (4.1.97) и (4.1.98) в соответствии с условием сращивания (4.1.66), получим

$$B = \alpha - \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right]. \quad (4.1.99)$$

Сформируем составное разложение. Для этого к (4.1.95) прибавим (4.1.96) и вычтем (4.1.98); получим

$$y^c = \beta \exp \left[- \int_1^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] + \left\{ \alpha - \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[- \frac{a(0)x}{\varepsilon} \right] + O(\varepsilon). \quad (4.1.100)$$

Положив $a(x) = b(x) = 1$, придем к

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e) e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (4.1.101)$$

что соответствует (4.1.20). Положив $a(x) = 2x + 1$ и $b(x) = 2$, получим

$$y^c = \frac{3\beta}{1+2x} + (\alpha - 3\beta) e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (4.1.102)$$

4.1.4. Уравнение Рейнольдса для скользящей опоры

Распределение давлений в изотермическом сжимаемом слое в бесконечно длинной скользящей опоре (см. рис. 4.1) определяется из уравнения Рейнольдса, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 p \frac{dp}{dx} \right) = \Lambda \frac{d}{dx} (ph). \quad (4.1.103)$$

Здесь расстояние x , толщина слоя h и давление p приведены к безразмерному виду с помощью следующих характерных пара-

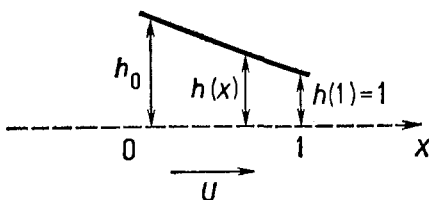


Рис. 4.1.

метров задачи: длины опоры вдоль направления движения L , толщины слоя смазки T на заднем конце опоры и внешнего давления p_a . Число Λ определяется выражением $\Lambda = 6\mu LU / p_a T^2$, где μ — вязкость жидкости, а U — скорость верхней поверхности. Граничные условия имеют вид

$$p = 1 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 1. \quad (4.1.104)$$

Следуя Ди Прима [1969], будем искать асимптотическое решение этой задачи при больших Λ , используя метод сращивания асимптотических разложений.

Внешнее разложение ищем в виде

$$p^o = p_0(x) + \Lambda^{-1} p_1(x) + \dots \quad (4.1.105)$$

Подставив это разложение в (4.1.103) и приравняв коэффициенты при равных степенях Λ^{-1} , получим

$$\frac{d}{dx} (h p_0) = 0, \quad (4.1.106)$$

$$\frac{d}{dx} (h p_1) = \frac{d}{dx} \left(h^3 p_0 \frac{dp_0}{dx} \right). \quad (4.1.107)$$

Поскольку эти уравнения являются уравнениями первого порядка, то одно из граничных условий должно быть опущено, и внешнее разложение будет непригодным вблизи этой границы. Так как h и Λ положительны, то по соображениям, аналогичным тем, которые использовались в п. 4.1.2 и 4.1.3, придем к выводу, что должно быть опущено краевое условие при $x = 1$.

Следовательно, условие $p^0(0) = 1$ вместе с (4.1.105) дает

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0. \quad (4.1.108)$$

Поэтому решение для p_0 имеет вид

$$p_0 = \frac{h_0}{h(x)}, \quad (4.1.109)$$

а решение для p_1 имеет вид

$$p_1 = \frac{h_0^2 [h'(0) - h'(x)]}{h(x)}. \quad (4.1.110)$$

Это внешнее разложение необходимо дополнить внутренним разложением (решением в пограничном слое) вблизи $x = 1$. Введя преобразование растяжения

$$\xi = (1-x) \Lambda^\sigma, \quad \sigma > 0, \quad (4.1.111)$$

преобразуем (4.1.103) к виду

$$\Lambda^{\sigma-1} \frac{d}{d\xi} \left[h^3 (1 - \xi \Lambda^{-\sigma}) p \frac{dp}{d\xi} \right] = - \frac{d}{d\xi} [h (1 - \xi \Lambda^{-\sigma}) p]. \quad (4.1.112)$$

При $\Lambda \rightarrow \infty$ это уравнение приводится к одному из трех видов

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(p \frac{dp}{d\xi} \right) &= 0 \quad \text{при } \sigma > 1, \\ \frac{dp}{d\xi} &= 0 \quad \text{при } \sigma < 1, \\ \frac{d}{d\xi} \left(p \frac{dp}{d\xi} \right) &= - \frac{dp}{d\xi} \quad \text{при } \sigma = 1. \end{aligned} \quad (4.1.113)$$

Первые два случая должны быть отброшены. Действительно, решением второго уравнения является постоянная, а решение первого уравнения выходит на постоянную при $\xi \rightarrow \infty$ ¹⁾, и, таким образом, оба эти случая не могут удовлетворить граничным условиям. В третьем случае уравнение имеет первый интеграл вида

$$p \frac{dp}{d\xi} + p = A, \quad (4.1.114)$$

где A — постоянная. Решение уравнения (4.1.114) имеет вид

$$-\xi = p + A \ln(p - A) + B, \quad (4.1.115)$$

где B — другая постоянная. Это решение, таким образом, является первым членом P_0 внутреннего разложения

$$p^i = P_0(\xi) + \Lambda^{-1} P_1(\xi) + \dots \quad (4.1.116)$$

¹⁾ Точнее, ограниченные при $\xi \rightarrow \infty$ решения первого уравнения (4.1.113) суть постоянные. — Прим. ред.

и, следовательно, оно должно удовлетворять краевому условию $p(x=1)=1$ или $p^i(\xi=0)=1$, что вместе с (4.1.116) приводит к

$$P_0(0)=1. \quad (4.1.117)$$

Подставив (4.1.117) в (4.1.115), получим

$$B=-1-A \ln(1-A). \quad (4.1.118)$$

Следовательно, P_0 неявно определяется уравнением

$$-\xi = P_0 - 1 + A \ln \frac{A-P_0}{A-1}. \quad (4.1.119)$$

Чтобы определить A , положим $m=n=1$ в условии сращения (4.1.66). Имеем

$$\text{одночленное внутреннее разложение (одночленного внешнего разложения)} = h_0, \quad (4.1.120)$$

$$\text{одночленное внешнее разложение (одночленного внутреннего разложения)} = A. \quad (4.1.121)$$

Равенство (4.1.121) получено в результате разложения уравнения (4.1.119) при больших ξ с учетом неявной зависимости P_0 от ξ . Приравняв (4.1.120) и (4.1.121) в соответствии с условием сращения, получим

$$A = h_0, \quad (4.1.122a)$$

следовательно,

$$-\xi = P_0 - 1 + h_0 \ln \frac{h_0 - P_0}{h_0 - 1}. \quad (4.1.122b)$$

Составное равномерно пригодное разложение первого порядка в соответствии с

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i$$

имеет вид

$$y^c = \frac{h_0}{h(x)} + P_0(\xi) - h_0 + O(\Lambda^{-1}), \quad (4.1.123)$$

где P_0 определяется из (4.1.122b).

4.1.5. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин

Рассмотрим теперь задачу о несимметричном изгибе предварительно напряженных кольцевых пластин, которую поставили Альцхаймер и Дэвис [1968] и которая обсуждалась в п. 2.2.4. Эта задача приводит к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (2.2.28) с краевыми условиями (2.2.29), (2.2.30). При $\epsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.2.28) при-

водится к уравнению второго порядка (2.2.31), решение которого, вообще говоря, может удовлетворить только двум из четырех краевых условий. Следовательно, его решение не будет пригодным в окрестности одной или обеих границ, где необходимо вводить пограничные слои.

С помощью рассуждений, аналогичных использованным в п. 4.1.2, 4.1.3, можно прийти к выводу, что пограничный слой будет образовываться в окрестностях обоих концов, т. е. при $r=b$ и $r=1$. Пограничный слой при $r=b$ характеризуется преобразованием растяжения

$$\xi = (r-b)\varepsilon^{-1}. \quad (4.1.124)$$

Тогда в окрестности точки $r=b$ уравнение для u примет вид

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\varepsilon}{b+\varepsilon\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{\varepsilon^2}{(b+\varepsilon\xi)^2} \right]^2 u - \left[\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{\varepsilon}{b+\varepsilon\xi} \frac{du}{d\xi} - \frac{u\varepsilon^2}{(b+\varepsilon\xi)^2} \right] = 0. \quad (4.1.125)$$

При $r=1$ пограничный слой характеризуется преобразованием растяжения

$$\eta = (1-r)\varepsilon^{-1}, \quad (4.1.126)$$

и поэтому в окрестности точки $r=1$ $u(\eta)$ должно удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\eta)^2} \right]^2 u - \left[\frac{d^2 u}{d\eta^2} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\eta} \frac{du}{d\eta} - \frac{u\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\eta)^2} \right] = 0. \quad (4.1.127)$$

Внешнее разложение. Будем искать разложение вида

$$u^o = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n u_n(r) + O(\varepsilon^N) \quad (4.1.128)$$

с помощью внешнего предельного перехода: $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном r . Для этого, подставив это разложение в (2.2.28) и приравняв коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{u_n}{r^2} = 0 \quad \text{при всех } n, \quad (4.1.129)$$

откуда

$$u_n = \frac{A_n}{r} + B_n r, \quad (4.1.130)$$

где A_n и B_n — постоянные. Поскольку пограничный слой присутствует в обоих концах, то мы не можем использовать граничные условия для определения этих постоянных. Они определяются при сращивании внешнего решения с решениями в пограничных слоях.

Внутреннее разложение в окрестности $r=b$. В этом случае внутреннее разложение мы будем искать с помощью внутреннего предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $\xi = (r-b)\varepsilon^{-1}$. Пусть

$$u^i = U_0(\xi) + \varepsilon U_1(\xi) + \dots \quad (4.1.131)$$

Подставив это разложение в (4.1.125) и приравняв коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - 1 \right) \frac{d^2 U_0}{d\xi^2} = 0, \quad (4.1.132)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - 1 \right) \frac{d^2 U_1}{d\xi^2} = \frac{1}{b} \left(1 - 2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \frac{d U_0}{d\xi}. \quad (4.1.133)$$

Это разложение должно удовлетворять граничным условиям (2.2.29), т. е.

$$u^i(\xi=0) = b\alpha, \quad \frac{du^i}{d\xi}(\xi=0) = \varepsilon\alpha. \quad (4.1.134)$$

Последние условия вместе с (4.1.131) приводят к

$$U_0(0) = b\alpha, \quad U'_0(0) = 0, \quad (4.1.135a)$$

$$U_1(0) = 0, \quad U'_1(0) = \alpha. \quad (4.1.135b)$$

Общее решение (4.1.132) имеет вид

$$U_0 = a_0 + b_0 \xi + c_0 e^{-\xi} + d_0 e^{\xi}. \quad (4.1.136)$$

Постоянная d_0 должна быть равна нулю, иначе U_0 будет экспоненциально расти и его нельзя будет срастить с внешним разложением.

Краевое условие (4.1.135a) требует, чтобы

$$b_0 = c_0, \quad a_0 + c_0 = b\alpha.$$

Таким образом, U_0 может быть записано в виде

$$U_0 = b\alpha + c_0(e^{-\xi} + \xi - 1), \quad (4.1.137)$$

где c_0 — постоянная, которая должна будет определиться при сращивании. Чтобы произвести сращивание, положим $m=n=1$ в условии сращивания (4.1.66). Имеем

$$\frac{A_0}{b} + B_0 b = \begin{cases} \frac{c_0(r-b)}{\varepsilon}, & \text{если } c_0 \neq 0, \\ b\alpha, & \text{если } c_0 = 0. \end{cases} \quad (4.1.138)$$

Следовательно,

$$c_0 = 0, \quad \frac{A_0}{b} + B_0 b = b\alpha. \quad (4.1.139)$$

Для того чтобы определить A_0 и B_0 , требуется еще одно соотношение между ними, которое может быть получено только при сращивании внешнего разложения с внутренним при $r=1$.

В этом примере можно было бы сразу выписать разложение до высших порядков и затем применить сращивание. При этом возникли бы громоздкие алгебраические выражения, пропорциональные c_0 . Вообще говоря, не удастся определить внешнее и внутреннее разложения до любого порядка и затем применить сращивание для определения произвольных постоянных. Например, в задаче об обтекании тела при больших числах Рейнольдса приходится строить разложение последовательно шаг за шагом (см., например, Ван Дайк [1964]).

Если $U_0 = b\alpha$, то решение уравнения (4.1.133), удовлетворяющее краевому условию (4.1.135б) и не растущее экспоненциально, имеет вид

$$U_1 = c_1(e^{-\xi} + \xi - 1) + \alpha\xi. \quad (4.1.140)$$

Чтобы определить c_1 , мы срастим двучленное внутреннее разложение с двучленным внешним разложением. Имеем

двучленное внутреннее разложение (двучленного внешнего разложения) =

$$= \frac{A_0}{b} + B_0b + \varepsilon \left[\frac{A_1}{b} + B_1b + \left(B_0 - \frac{A_0}{b^2} \right) \xi \right], \quad (4.1.141)$$

двучленное внешнее разложение (двучленного внутреннего разложения) = $b\alpha + (c_1 + \alpha) \times$
 $\times (r - b) - \varepsilon c_1.$

$$(4.1.142)$$

Приравняв (4.1.141) и (4.1.142) в соответствии с условием сращивания, получим

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{b} + B_0b + \varepsilon \left[\frac{A_1}{b} + B_1b + \left(B_0 - \frac{A_0}{b^2} \right) \xi \right] = \\ = b\alpha + (c_1 + \alpha)(r - b) - \varepsilon c_1. \end{aligned} \quad (4.1.143)$$

Поскольку $\xi = (r - b)\varepsilon^{-1}$, имеем

$$\frac{A_1}{b} + B_1b = -c_1, \quad B_0 - \frac{A_0}{b^2} = c_1 + \alpha. \quad (4.1.144)$$

Таким образом, мы имеем два уравнения для A_1 , B_1 и c_1 ; третье соотношение между ними получается при сращивании внешнего разложения с внутренним в точке $r=1$.

Внутреннее разложение в окрестности точки $r=1$. Внутреннее разложение вида

$$u' = \tilde{U}_0(\eta) + \varepsilon \tilde{U}_1(\eta) + \dots \quad (4.1.145)$$

вблизи точки $r=1$ будем искать с помощью внутреннего предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $\eta = (1-r)\varepsilon^{-1}$. Подставив это разложение в (4.1.127) и приравняв коэффициенты при равных степенях ε , получим

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right) \frac{d^2 \tilde{U}_0}{d\eta^2} = 0, \quad (4.1.146)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right) \frac{d^2 \tilde{U}_1}{d\eta^2} = \left(2 \frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right) \frac{d \tilde{U}_0}{d\eta}. \quad (4.1.147)$$

Поскольку $r=1$ соответствует $\eta=0$, то u^I должно удовлетворять граничным условиям (2.2.30), т. е.

$$u^I = \frac{du^I}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta=0. \quad (4.1.148)$$

Эти условия в сочетании с (4.1.145) дают

$$\tilde{U}_0(0) = 0, \quad \tilde{U}'_0(0) = 0, \quad (4.1.149)$$

$$\tilde{U}_1(0) = 0, \quad \tilde{U}'_1(0) = 0. \quad (4.1.150)$$

Решение задачи (4.1.146), (4.1.149), не растущее экспоненциально, имеет вид

$$\tilde{U}_0 = \tilde{c}_0 (e^{-\eta} + \eta - 1). \quad (4.1.151)$$

Чтобы определить \tilde{c}_0 , срастим одночленное внешнее разложение с одночленным внутренним разложением. Получим

$$A_0 + B_0 = \tilde{c}_0 \frac{1-r}{\varepsilon}, \quad (4.1.152)$$

откуда

$$\tilde{c}_0 = 0 \quad \text{и} \quad A_0 + B_0 = 0 \quad (4.1.153)$$

и

$$\tilde{U}_0 = 0. \quad (4.1.154)$$

Решив (4.1.139) и (4.1.153) относительно A_0 и B_0 , получим

$$A_0 = -B_0 = \frac{b^2 \alpha}{1-b^2}. \quad (4.1.155)$$

Следовательно,

$$u_0 = \frac{b^2 \alpha}{1-b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right). \quad (4.1.156)$$

Поскольку $\tilde{U}_0 = 0$, то решение задачи (4.1.147), (4.1.150), не растущее экспоненциально, имеет вид

$$\tilde{U}_1 = \tilde{c}_1 (e^{-\eta} + \eta - 1). \quad (4.1.157)$$

Чтобы определить \tilde{c}_1 , срастим двучленное внешнее разложение с двучленным внутренним разложением. Имеем

$$\text{двучленное внутреннее разложение (двучленного внешнего разложения)} = 0 + \varepsilon (2A_0\eta + A_1 + B_1), \quad (4.1.158)$$

$$\text{двучленное внешнее разложение (двучленного внутреннего разложения)} = \tilde{c}_1(1-r) - \varepsilon\tilde{c}_1. \quad (4.1.159)$$

Приравняв (4.1.158) и (4.1.159) в соответствии с условием сращения, получим

$$\tilde{c}_1 = 2A_0 = \frac{2b^2\alpha}{1-b^2}, \quad A_1 + B_1 = -\tilde{c}_1 = -\frac{2b^2\alpha}{1-b^2}. \quad (4.1.160)$$

Поскольку A_0 и B_0 определяются из (4.1.155), то (4.1.144) дает

$$c_1 = -\frac{2\alpha}{1-b^2}, \quad (4.1.161)$$

а из (4.1.144) и (4.1.160) следует

$$A_1 = \frac{2\alpha b(1+b^3)}{(1-b^2)^2}, \quad B_1 = -\frac{2ab(1+b)}{(1-b^2)^2}. \quad (4.1.162)$$

Это завершает определение всех постоянных интегрирования для разложения второго порядка.

Составное разложение. Сначала соберем все результаты предыдущих трех пунктов

$$u^o = \frac{b^2\alpha}{1-b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) + \varepsilon \frac{2\alpha b}{(1-b^2)^2} \left[\frac{1+b^3}{r} - (1+b)r \right] + O(\varepsilon^2), \quad (4.1.163)$$

$$u^i = b\alpha - \varepsilon \frac{2\alpha}{1-b^2} \left(e^{-\xi} + \frac{1+b^2}{2} \xi - 1 \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.1.164)$$

$$u^l = \varepsilon \frac{2b^2\alpha}{1-b^2} (e^{-\eta} + \eta - 1) + O(\varepsilon^2), \quad (4.1.165)$$

$$(u^o)^i = b\alpha - \frac{2\alpha}{1-b^2} \varepsilon \left(\frac{1+b^2}{2} \xi - 1 \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.1.166)$$

$$(u^o)^l = \frac{2b^2\alpha}{1-b^2} \varepsilon (\eta - 1) + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.167)$$

Таким образом, составное разложение, равномерно пригодное в интервале $[b, 1]$, имеет вид

$$\begin{aligned} u^c &= u^o + u^i + u^l - (u^o)^i - (u^o)^l = \\ &= \frac{b^2\alpha}{1-b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{2\varepsilon\alpha b^2}{(1-b^2)^2} \left[\frac{1+b^3}{r} - (1+b)r \right] - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon\alpha}{1-b^2} e^{-\xi} + \frac{2\varepsilon b^2\alpha}{1-b^2} e^{-\eta} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.1.168)$$

4.1.6. Термоупругие поверхностные волны

В п. 2.4.3 задача о термоупругих поверхностных волнах была сведена к решению алгебраических уравнений (2.4.35) для квадрата волновой скорости $x = c^2$. Прямое разложение для решения этого уравнения при малых ε (см. п. 2.4.3) имеет вид

$$x = x_R \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\tau x_R \left(1 - \frac{1 - x_R}{F} \right)}{(1 - \tau x_R) [1 + G'(x_R)]} \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (4.1.169)$$

при малых τ и

$$x = \frac{1}{\tau} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon \tau}{\tau - 1} - \frac{\varepsilon^2 \tau}{\tau - 1} \left[\frac{-\tau^2}{(\tau - 1)^2} + M^2 \right] \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (4.1.170)$$

при больших τ , где $F(c_R^2)$ и $M(c_R^2)$ определяются из (2.4.39) и (2.4.42) соответственно, и

$$x_R = c_R^2 \approx 0,2817 \text{ (квадрат скорости волн Рэлея).}$$

Скорость волн Рэлея является решением уравнения

$$G(c_R^2) = 1 - c_R^2. \quad (4.1.171)$$

Ясно, что разложение (4.1.169) становится непригодным, если $\tau \uparrow 1/x_R$. Действительно, $x \rightarrow \infty$, если $\tau \rightarrow 1/x_R$. Второй член разложения (4.1.170) показывает, что оно становится непригодным при $\tau \downarrow 1$, а из рассмотрения третьего члена следует, что пригодность этого разложения нарушается задолго до $\tau = 1$. Поскольку из (4.1.171) $G(x_R) = 1 - x_R$, то коэффициент при M^2 в (2.4.42) обращается в нуль, если $\tau = 1/x_R \approx 3,550$. Следовательно, как M , так и x стремятся к бесконечности при $\tau \downarrow 1/x_R$. Таким образом, оба эти разложения становятся непригодными при $\tau_R = 1/x_R$.

Чтобы определить разложение, равномерно пригодное для всех τ , мы будем рассматривать вышеприведенные разложения в качестве внешних разложений и дополним их внутренними разложениями вблизи $\tau = \tau_R$. Во всех примерах, рассмотренных до сих пор, нам приходилось применять преобразование растяжения только к независимым переменным. Однако в этом случае мы нашли, что преобразование растяжения необходимо применить как к независимой переменной τ , так и к зависимой переменной x . Введем следующее преобразование:

$$T = \frac{\tau - \tau_R}{\tau_R} \varepsilon^{-n}, \quad X = \frac{x_R - x}{x_R} \varepsilon^{-m}, \quad 0 < m, n < 1. \quad (4.1.172)$$

Прежде чем делать замену переменных в (2.4.35), заметим, что

$$\begin{aligned} [1 - x\tau(1 + \varepsilon) + A]^2 &= \\ &= (1 - x\tau + A)^2 - 2x\tau\varepsilon(1 - x\tau + A) + O(\varepsilon^2) = \\ &= (1 - x\tau)^2 + 2A(1 - x\tau) + A^2 - 2\varepsilon x\tau(1 - x\tau + A) + O(\varepsilon^2) = \\ &= (1 - x\tau) \left[2 - x\tau - x + 2A - \varepsilon x\tau \frac{3 - 2x\tau + 2A}{1 - x\tau} \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (2.4.35) может быть переписано в виде

$$G(x) = 1 - x - \frac{\varepsilon x^2 \tau}{2 - x - x\tau + 2A} \left(1 + \frac{2A}{1 - x\tau} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.173)$$

После преобразования (4.1.172) получим

$$X[1 + G'(x_R)] = \frac{2}{\sqrt{1 - x_R}} \frac{\varepsilon^{1 - 3m/2}}{\sqrt{X - \varepsilon^n - mT}} + O(\varepsilon). \quad (4.1.174)$$

Чтобы получить нетривиальный результат при $\varepsilon \rightarrow 0$, положим

$$m = n = \frac{2}{3},$$

тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ равенство (4.1.174) примет вид

$$X[1 + G'(x_R)] = \frac{1}{\sqrt{1 - x_R} \sqrt{X - T}}.$$

Полагая

$$\xi^2 = X - T, \quad (4.1.175)$$

можно переписать это уравнение в виде

$$\xi^3 + T\xi = K, \quad (4.1.176)$$

где

$$K = \frac{2}{\sqrt{1 - x_R} [1 + G'(x_R)]}.$$

Следовательно, решение этого кубического уравнения дает первый член внутреннего разложения. Это кубическое уравнение имеет один или три корня в зависимости от того, положительно выражение

$$D = \frac{K^2}{4} + \frac{T^3}{27}$$

или нет. При положительных или малых отрицательных T величина D положительна, и уравнение имеет только один действительный корень:

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}K + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}K + \sqrt{D}}. \quad (4.1.177)$$

При $T < -3\sqrt[3]{K^2/4}$ существуют три действительных корня для ξ . В этом случае мы выберем тот, который определяется выражением (4.1.177), если в нем изменить знак при D . Срастим это внутреннее разложение с внешними разложениями (4.1.169) и (4.1.170) и затем построим равномерно пригодные составные разложения.

Разложение для $0 \leq \tau \leq \tau_R$. Срастим внутреннее разложение с внешним разложением (4.1.169), положив в (4.1.66) $m = n = 2$. Имеем

двучленное внутреннее разложение (двучленного внешнего разложения) =

$$= x_R \left[1 - \varepsilon^{2/3} \frac{K}{\sqrt{-T}} \right], \quad (4.1.178)$$

двучленное внешнее разложение (двучленного внутреннего разложения) =

$$= x_R \left[1 - \varepsilon^{2/3} \frac{K}{\sqrt{-T}} \right]. \quad (4.1.179)$$

Написав (4.1.179), мы нашли решение уравнения (4.1.176) при больших отрицательных значениях T и выбрали корень

$$\xi = \sqrt{-T} - \frac{K}{2T} + \dots \text{ при } T \rightarrow -\infty, \quad (4.1.180)$$

так как выражение (4.1.177) непригодно для больших отрицательных T . Поскольку (4.1.178) и (4.1.179) равны, то внешнее разложение (4.1.169) фактически уже сращено с внутренним разложением, представленным (4.1.176). Поэтому составное разложение, пригодное для всех $0 \leq \tau \leq \tau_R$, дается выражением

$$\begin{aligned} x^c &= x^o + x^i - (x^o)^i = \\ &= x_R \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\tau x_R \left(1 - \frac{1 - x_R}{F} \right)}{(1 - \tau x_R) [1 + G'(x_R)]} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{2/3} \left[\frac{K}{\sqrt{-T}} - T - \xi^2 \right] \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.1.181)$$

Заметим, что это разложение регулярно при $\tau = \tau_R$, так как вклад в сингулярность члена порядка ε в точности уничтожается членом $\varepsilon^{2/3} K / \sqrt{-T}$.

Разложение при $\tau \geq \tau_R$. В этом случае T положительно. Срастим внешнее разложение (4.1.170) с внутренним, положив, так же как и в предыдущем случае, $m = n = 2$. Имеем

двучленное внутреннее разложение (двучленного внешнего разложения) =

$$= x_R(1 - \varepsilon^{2/3}T), \quad (4.1.182)$$

двучленное внешнее разложение (двучленного внутреннего разложения) =

$$= x_R \left[1 - \frac{\tau - \tau_R}{\tau_R} + 0 \cdot \varepsilon \right]. \quad (4.1.183)$$

Так как выражения (4.1.182) и (4.1.183) равны, то эти разложения фактически уже сращены. Составное разложение, равномерно пригодное при $\tau \geq \tau_R$, имеет вид

$$\begin{aligned} x^c &= x^o + x^i - (x^o)^i = \\ &= \frac{1}{\tau} - \frac{\varepsilon}{\tau - 1} - \varepsilon^{2/3} x_R \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.1.184)$$

Найфэ и Неммат-Нассер [1971] первыми исследовали эту задачу с помощью метода сращивания асимптотических разложений. Результаты этого пункта показывают, что внешнее и внутреннее разложения, вообще говоря, не могут быть представлены в виде одинаковых асимптотических последовательностей, скажем, по степеням ε . В этом примере внешние разложения строились по целым степеням ε , в то время как внутреннее разложение по дробным степеням ε . Кроме того, этот пример служит демонстрацией того, что неоднородность может возникать внутри области, а не только на границе, как это было в ранее рассмотренных примерах.

4.1.7. Задача о космическом корабле Земля — Луна¹⁾

В примерах, обсуждавшихся до сих пор, асимптотические последовательности содержали либо целые степени ε^n , либо дробные степени $\varepsilon^{m/n}$ малого параметра. В некоторых случаях эти асимптотические последовательности могут оказаться неспособными представить решение. Тогда их приходится дополнять членами, содержащими $\log(1/\varepsilon)$, которые, будучи умноженными на любую дробную степень ε , стремятся к нулю. Из настоящего примера видно, что следует иметь в виду тот факт, что может оказаться необходимым дополнить эти последовательности членами, содержащими такие логарифмы, как $\log(1/\varepsilon)$, $\log[\log(1/\varepsilon)]$, $\log\{\log[\log(1/\varepsilon)]\}$, или им эквивалентные.

Рассматриваемая задача математически представлена уравнениями (2.4.7) — (2.4.9) в п. 2.4.2. Одномерная задача исследовалась в п. 3.2.2 с помощью метода растянутых координат. В п. 3.5.3 показано, что в двумерном случае метод растянутых координат приводит к ошибочным результатам.

¹⁾ См. примечание к п. 2.4.2. — *Прим. ред.*

Если вместо t в качестве независимой переменной выбрать x , то прямое разложение (полученное с использованием внешнего предельного перехода $\mu \rightarrow 0$ при фиксированном x) дается выражениями (2.4.17)–(2.4.19). Было отмечено, что вблизи точки $x=1$ это разложение становится непригодным, так как второй член в разложении (2.4.18) имеет логарифмическую, а третий — алгебраическую особенность вблизи $x=1$. Величину неравномерности, а значит, и соответствующее преобразование растяжения, можно оценить, рассматривая отношение наиболее сингулярной части члена $O(\mu^2)$ к наиболее сингулярной части члена $O(\mu)$. Эта оценка наводит на мысль, что областью неоднородности является $1-x=O(\mu)$. Если бы мы взяли отношение сингулярной части члена $O(\mu)$ к первому члену, то пришли бы к выводу, что областью неравномерности является $1-x=O(e^{-1/\mu})$, что неверно.

Лучшим способом оценки величины неоднородности и определения преобразования растяжения является исследование порядка величины разных членов в уравнениях, как мы это делали в более ранних примерах. Введем преобразование

$$\xi = \frac{1-x}{\mu^\alpha}, \quad \zeta = \frac{y}{\mu^\beta}, \quad \eta = \frac{t-\tau}{\mu^\beta}, \quad \alpha \text{ и } \beta > 0, \quad (4.1.185)$$

где τ — время, необходимое для достижения $x=1$. Преобразуем (2.4.7) к виду

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{(1-\mu)\mu^{2\beta-\alpha}(1-\mu^{\alpha\xi})}{[(1-\mu^{\alpha\xi})^2 + \mu^{2\alpha}\zeta^2]^{3/2}} - \mu^{1-3\alpha+2\beta} \frac{\xi}{(\xi^2 + \zeta^2)^{3/2}}. \quad (4.1.186)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой ускорение космического корабля; первый член правой части равен вкладу притяжения Земли в ускорение космического корабля, последний член представляет собой вклад притяжения Луны в это ускорение. Если мы пренебрежем силой притяжения Луны в сравнении с силой притяжения Земли, то мы получим внешнее разложение (2.4.12), которое непригодно в окрестности точки $x=1$. Таким образом, чтобы получить разложение, пригодное вблизи Луны, (т. е. $x=1$), надо считать, что вклад в ускорение космического корабля от притяжения Луны имеет тот же порядок, что и само ускорение, т. е.

$$3\alpha - 2\beta = 1. \quad (4.1.187)$$

Этому условию могут удовлетворить бесконечно много значений α и β . Поскольку внутреннее разложение должно быть сращено с внешним, то скорость $d\xi/d\eta$ в окрестности Луны должна иметь тот же порядок, что и скорость $dx/dt = O(1)$ вдали от Луны;

следовательно,

$$\alpha = \beta. \quad (4.1.188)$$

Поэтому

$$\alpha = \beta = 1 \quad (4.1.189)$$

и исходное уравнение может быть переписано с использованием внутренней переменной $\xi = (1-x)\mu^{-1}$ в виде

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = (1-\mu) \frac{1-\mu\xi}{[(1-\mu\xi)^2 + y^2]^{3/2}} - \mu^2 \frac{\xi}{(\mu^2 \xi^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (4.1.190)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -(1-\mu) \frac{y}{[(1-\mu\xi)^2 + y^2]^{3/2}} - \mu \frac{y}{(\mu^2 \xi^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4.1.191)$$

Ниже мы рассмотрим одномерный случай. Лагерстром и Кеворкян [1963b] рассмотрели двумерный случай, а Лагерстром и Кеворкян [1963a] и Брекуэлл и Перко [1966] исследовали случай вращающихся центров масс.

Положим $y=0$ и проинтегрируем уравнение (2.4.7) с начальными условиями (2.4.10) при $h=\rho=0$. Имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0)=0. \quad (4.1.192)$$

Внешнее разложение (полученное с использованием внешнего предела $\mu \rightarrow 0$ при x фиксированном) имеет вид (упражнение 2.12):

$$\sqrt{2}t^0 = \frac{2}{3} x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + O(\mu^2). \quad (4.1.193)$$

При $x \rightarrow 1$ оно становится непригодным. Чтобы описать решение вблизи $x=1$, положим $\xi = (1-x)\mu^{-1}$. Тогда уравнение (4.1.192) примет вид

$$\frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{1-\mu\xi} + \frac{1}{\xi}. \quad (4.1.194)$$

Используя внутренний предельный переход $\mu \rightarrow 0$ при ξ фиксированном, будем искать внутреннее разложение в виде

$$t^i = \tau_0 + \mu T_1(\xi) + O(\mu^2). \quad (4.1.195)$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях μ , получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dT_1} \right)^2 = 1 + \frac{1}{\xi}. \quad (4.1.196)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\sqrt{2}T_1 = -\sqrt{\xi(\xi+1)} + \text{Arsh} \sqrt{\xi} + \tau_1, \quad (4.1.197)$$

где τ_1 и τ_0 — постоянные, которые должны определиться при сращивании, так как это разложение непригодно вблизи $x=0$ и мы не можем использовать начальное условие $t(x=0)=0$.

Чтобы произвести сращивание, положим $m=n=2$ в (4.1.66) и получим

двучленное внутреннее разложение (двучленного внешнего разложения) =

$$= \frac{2}{3} + \mu \left[-\xi + \frac{5}{3} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu + \frac{1}{2} \ln \xi \right], \quad (4.1.198)$$

двучленное внешнее разложение (двучленного внутреннего разложения) =

$$= \sqrt{2}\tau_0 - 1 + x - \mu \left[\frac{1}{2} - \ln 2 - \tau_1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{\mu} \right]. \quad (4.1.199)$$

Приравняв (4.1.198) и (4.1.199) в соответствии с условием сращения, получим

$$\sqrt{2}\tau_0 = \frac{2}{3}, \quad \tau_1 = \frac{13}{6} - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu. \quad (4.1.200)$$

Откуда

$$\sqrt{2}t^i = \frac{2}{3} + \mu \left[\frac{13}{6} - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \operatorname{Arsh} \sqrt{\xi} \right] + O(\mu^2). \quad (4.1.201)$$

Это разложение кроме членов $O(\mu)$ содержит член $\mu \ln \mu$.

Составное разложение, равномерно пригодное на интервале $[0, 1]$, может быть получено в соответствии с

$$t^c = t^o + t^i - (t^o)^i,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t^c = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left[\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu + \frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \right. \\ \left. - \ln(1 + \sqrt{x}) + \xi - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \operatorname{Arsh} \sqrt{\xi} \right] + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (4.1.202)$$

4.1.8. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса

В качестве последнего примера рассмотрим задачу обтекания сферы при малых числах Рейнольдса, которая обсуждалась в п. 2.1.4. Этот пример отличается от предыдущих тем, что он описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Кроме того, он показывает, что иногда необходимо преобразование сжатия, а не растяжения. Функция тока удовлет-

воряет уравнению в частных производных четвертого порядка (2.1.37) и граничным условиям (2.1.39) и (2.1.40).

Разложение Стокса. В п. 2.1.4 было получено прямое разложение (2.1.59), которое Лагерстром и Коул [1955] назвали разложением Стокса. Оно было получено с помощью так называемого предельного перехода Стокса: $R \rightarrow 0$ при фиксированном r . Как было отмечено в п. 2.1.4, разложение Стокса удовлетворяет условию (2.1.39) на поверхности сферы, но не удовлетворяет условию на бесконечности (2.1.40). Таким образом, разложение Стокса становится непригодным при $r \rightarrow \infty$ (парадокс Уайтхеда).

Разложение Озеена. Чтобы выяснить причину этой неравномерности, Озеен [1910] исследовал относительную величину „конвективных“ членов, которыми Стокс пренебрег, и „вязких“ членов, которые были Стоксом оставлены. Правая часть уравнения (2.1.45) показывает, что

$$\text{пренебрегаемые члены} = O\left(\frac{R}{r^2}\right), \quad (4.1.203a)$$

в то время как перекрестные члены, оставляемые в (2.1.42), равны

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi_0 = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4.1.203б)$$

Следовательно,

$$\frac{\text{пренебрегаемые}}{\text{оставляемые}} = O(Rr) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.1.203в)$$

и разложение Стокса становится непригодным при r , возрастающем до $O(R^{-1})$.

К этому выводу можно прийти также, заметив, что причиной неравномерности является член $-(3/16) R r^2 \sin^2 \theta \cos \theta$ в частном решении, который не ведет себя надлежащим образом при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, разложение Стокса пригодно, пока этот член мал в сравнении с членом $-(3/4) r \sin^2 \theta$ в ψ_0 , и разложение Стокса становится непригодным, если эти члены имеют одинаковый порядок, т. е. если $rR = O(1)$.

Эти соображения позволили Озеену [1910] получить приближение к потоку, пригодное везде. Это два первых члена того, что Лагерстром и Коул [1955] назвали разложением Озеена. Разложение Озеена получается с помощью предельного перехода Озеена: $R \rightarrow 0$ при фиксированном $\rho = Rr$. Отметим, что переход к ρ является преобразованием сжатия, а не растяжения. В но-

вых переменных уравнение (2.1.37) примет вид

$$D^4\psi = \frac{R^2}{\rho^2 \sin \theta} \left(\psi_\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \psi_\rho \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta \psi_\rho - 2 \frac{\psi_\theta}{\rho} \right) D^2\psi, \quad (4.1.204)$$

где

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (4.1.205)$$

Поскольку общее решение дифференциальных уравнений в частных производных, вообще говоря, не известно, то, по-видимому, более удобно и целесообразно строить внутреннее и внешнее разложения последовательно, член за членом, применяя условие сращивания в качестве ведущего принципа при формировании этих разложений. Так как решение Стокса (2.1.51) равномерно пригодно, то мы можем найти первый член в разложении Озеена, применив предельный переход Озеена в (2.1.51). Чтобы определить вид второго члена, используем условие сращивания

одночленное разложение Стокса (двучленного разложения Озеена) = двучленному разложению Озеена (одночленного разложения Стокса) =

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \frac{1}{R} \rho \sin^2 \theta. \quad (4.1.206)$$

Таким образом, разложение Озеена (обозначаемое через ψ^o) должно иметь вид

$$\psi^o = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{R} \Psi_1(\rho, \theta) + \Psi_2(\rho, \theta). \quad (4.1.207)$$

Первый член соответствует решению Стокса. Подставив это разложение в (4.1.204) и приравняв коэффициенты при R , получим

$$\left(D^2 - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) D^2 \Psi_1 = 0. \quad (4.1.208)$$

Это уравнение называется уравнением Озеена. Оно было получено Озееном из физических соображений.

Чтобы решить уравнение Озеена, мы, следуя Голдстейну [1929], положим

$$D^2 \Psi_1 = \varphi e^{(1/2) \rho \cos \theta}, \quad (4.1.209)$$

и имеем

$$\left(D^2 - \frac{1}{4} \right) \varphi = 0. \quad (4.1.210)$$

Вместо того чтобы искать общее решение уравнения (4.1.208), решая (4.1.209), (4.1.210), и затем использовать условие сращивания (4.1.206) для выделения членов, соответствующих решению Стокса, Праудмен и Пирсон [1957] срастили сначала $\mathcal{D}^2\psi^s$ и $\mathcal{D}^2\psi^o$. Поскольку

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2\psi^s &= \frac{3}{2} \frac{1}{r} \sin^2 \theta + O(R), \\ \mathcal{D}^2\psi^o &= R^2 D^2\psi^o = R D^2\psi_1(\rho, \theta) + O(R^2),\end{aligned}\quad (4.1.211)$$

и условие сращивания означает, что

$$\begin{aligned}\text{одночленное разложение Стокса (одного члена } \mathcal{D}^2\psi^o) &= \\ &= \text{одночленному разложению Озеена (одного члена } \mathcal{D}^2\psi^s),\end{aligned}\quad (4.1.212)$$

то получим

$$\text{одночленное разложение Стокса } (D^2\Psi_1) = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \sin^2 \theta. \quad (4.1.213)$$

Чтобы удовлетворить этому условию, будем искать решение в виде

$$\varphi = \sin^2 \theta f(\rho). \quad (4.1.214)$$

Имеем

$$f'' - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \right) f = 0. \quad (4.1.215)$$

Решение для f , не растущее экспоненциально, имеет вид

$$f = A \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) e^{-(1/2)\rho}. \quad (4.1.216)$$

Тогда

$$D^2\Psi_1 = A \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \sin^2 \theta e^{-(1/2)\rho (1 - \cos \theta)}. \quad (4.1.217)$$

Следовательно,

$$\text{одночленное разложение Стокса } (D^2\Psi_1) = \frac{2A}{R} \frac{1}{r} \sin^2 \theta. \quad (4.1.218)$$

В этом случае (4.1.213) дает $A = 3/4$ и $D^2\Psi_1$ принимает вид

$$D^2\Psi_1 = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \sin^2 \theta e^{-(1/2)\rho (1 - \cos \theta)}. \quad (4.1.219)$$

Частное решение уравнения (4.1.219) имеет вид

$$\Psi_{1p} = \frac{3}{2} (1 + \cos \theta) e^{-(1/2)\rho (1 - \cos \theta)}. \quad (4.1.220)$$

Поэтому

$$\Psi_1 = \Psi_{1c} + \frac{3}{2} (1 + \cos \theta) e^{-(1/2) \rho (1 - \cos \theta)}. \quad (4.1.221)$$

Тогда из (4.1.206) получим

$$\text{одночленное разложение Стокса: } (\Psi_{1c}) = -\frac{3}{2} (1 + \cos \theta). \quad (4.1.222)$$

Следовательно, $\Psi_{1c} = -3(1 + \cos \theta)/2$ и разложение Озеена примет вид

$$\psi^o = \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{2R} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-(1/2) \rho (1 - \cos \theta)}] + O(1). \quad (4.1.223)$$

Второй член в разложении Стокса. Из уравнений (2.1.51), (2.1.52) и (2.1.58) следует, что разложение Стокса второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^s = & \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta + \\ & + R \left[-\frac{3}{32} \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta + \psi_{1c} \right] + O(R^2), \end{aligned} \quad (4.1.224)$$

где ψ_{1c} — дополнительное решение уравнения (2.1.52). Чтобы найти ψ_{1c} , срастим два члена ψ^s с двумя членами ψ^o . Имеем двучленное разложение Стокса: $\psi \sim \psi_0 + R(\psi_{1p} + \psi_{1c})$. (4.1.225a)

Запишем через переменные Озеена:

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{4} \left(2 \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{3\rho}{R} + \frac{R}{\rho} \right) \sin^2 \theta + \\ & + R \left[-\frac{3}{32} \left(2 \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{3\rho}{R} + 1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sin^2 \theta \cos \theta + \psi_{1c} \left(\frac{\rho}{R}, \theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.225б)$$

Двучленное разложение Озеена: $= \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta +$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{R} \left[-\frac{3}{4} \left(\rho \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta \right) + \right. \\ & \left. + \text{члены порядка } O(1) \text{ по } R^2 \psi_{1c} \left(\frac{\rho}{R}, \theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.225в)$$

Двучленное разложение Озеена: $\psi \sim \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta -$

$$-\frac{3}{2R} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-(1/2) \rho (1 - \cos \theta)}]. \quad (4.1.226a)$$

Запишем через переменные Стокса: $= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta -$

$$- \frac{3}{2R} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-(1/2) r R (1 - \cos \theta)}]. \quad (4.1.226б)$$

$$\begin{aligned} \text{Двучленное разложение Стокса:} &= \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} r \right) \sin^2 \theta + \\ &+ \frac{3}{16} r^2 R \sin^2 \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.1.226в)$$

Приравнивая (4.1.225в) и (4.1.226в) в соответствии с условием сращивания, получим

$$\text{одночленное разложение Озеена: } (\psi_{1c}) = \frac{3}{16} r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.1.227)$$

Это наводит на мысль, что решение надо искать в виде

$$\psi_{1c} = f(r) \sin^2 \theta. \quad (4.1.228)$$

Тогда из (2.1.50) получим

$$f(r) = c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1}. \quad (4.1.229)$$

Условие сращивания (4.1.227) требует, чтобы $c_4 = 0$ и $c_2 = \frac{3}{16}$, в то время как граничные условия $\psi_1(1, \theta) = \psi_{1r}(1, \theta) = 0$ означают, что $c_1 = -\frac{9}{32}$, $c_{-1} = \frac{3}{32}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \psi^s &= \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta + \frac{3}{32} R \left[\left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. - \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right] + O(R^2). \end{aligned} \quad (4.1.230)$$

Высшие приближения. Праудмен и Пирсон [1957] нашли, что частное решение для ψ_2 содержит $\ln r$, что приводит к появлению $\ln R$ при сращивании. Это является еще одним примером, в котором возникают логарифмы параметра возмущения в результате сращивания разложений, одно из которых содержит логарифмы независимой переменной.

4.2. Метод составных разложений

Составные разложения, полученные в п. 4.1.1—4.1.7, являются частным случаем разложений вида

$$y(x; \varepsilon) = y^o(x; \varepsilon) + y^i(\xi; \varepsilon) - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^o)^o, \quad (4.2.1a)$$

где y — зависимая переменная, ε — малый параметр, x — внешняя переменная, ξ — внутренняя переменная. Составное разложение может рассматриваться как сумма двух членов $F(x; \varepsilon) = y^o$ и $G(\xi; \varepsilon) = y^i - (y^o)^i$, т. е.

$$y(x; \varepsilon) = F(x; \varepsilon) + G(\xi; \varepsilon). \quad (4.2.1б)$$

Вместо того чтобы определять внешнее и внутреннее разложения, сращивать их и затем строить составное разложение, Бромберг [1956] и Вишик и Люстерник [1957] предположили, что решение имеет вид (4.2.1б) и пригодно всюду. Следовательно, оно удовлетворяет всем граничным условиям. Взяв внешний предел от (4.2.1б) получим

$$y^0(x; \epsilon) = F + G^0. \quad (4.2.1в)$$

Эта функция должна удовлетворять исходному дифференциальному уравнению, выраженному через внешнюю переменную. Аналогично, функция

$$y^i = F^i + G \quad (4.2.1г)$$

должна удовлетворять исходному дифференциальному уравнению, записанному через внутреннюю переменную. Чтобы найти приближенное решение, F и G раскладывают по ϵ и для каждого уровня приближения получают уравнения и краевые условия. Этот метод применил Чудов [1966] для вязкого обтекания плоской пластины. Вариант метода Бромберга заново открыл О'Малли [1971].

Другой метод составных разложений ранее был предложен Латта [1951]. В соответствии с этим методом предполагалось, что решение также имеет вид (4.2.1б), но G является функцией внешней переменной и внутренней переменной ξ , которая имела более общий вид $g(x)/\delta(\epsilon)$, а не $x/\delta(\epsilon)$, причем функция g определялась в результате анализа. Кроме того, Латта исследовал внутреннее разложение и искал специальные функции, которые могут быть использованы для представления $G(x, \xi; \epsilon)$.

Ниже мы проиллюстрируем оба метода, применив их к частным примерам.

4.2.1. Уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу

$$\epsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.2.2а)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \quad (4.2.2б)$$

Как показано в п. 4.1.1, прямое разложение становится непригодным вблизи точки $x=0$, а чтобы описать поведение y в области неравномерности, вводилось внутреннее разложение, использующее преобразование растяжения $\xi = x\epsilon^{-1}$. Было показано, что внутреннее разложение содержит функцию $e^{-\xi} = e^{-x/\epsilon}$. Поскольку при дифференцировании функция $e^{-x/\epsilon}$ выражается через саму себя, то нет других специальных функций, необходимых для представления составного разложения. Поэтому Латта пред-

положил, что y имеет равномерно пригодное разложение вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x) + e^{-x/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n(x). \quad (4.2.3)$$

Подставляя (4.2.3) в (4.2.2а) и (4.2.2б) и приравнявая к нулю коэффициенты при ε^n и $\varepsilon^n e^{-x/\varepsilon}$ для всех n , получим уравнения для f_n и h_n . Уравнения для $n=0, 1$ и 2 имеют вид

$$f_0' + f_0 = 0, \quad h_0' - h_0 = 0, \quad (4.2.4)$$

$$f_1' + f_1 = -f_0'', \quad h_1' - h_1 = h_0'', \quad (4.2.5)$$

$$f_2' + f_2 = -f_1'', \quad h_2' - h_2 = h_1''. \quad (4.2.6)$$

Краевые условия имеют вид

$$f_0(1) = \beta, \quad f_0(0) + h_0(0) = \alpha, \quad (4.2.7)$$

$$f_n(1) = 0, \quad f_n(0) + h_n(0) = 0 \text{ при } n \geq 1. \quad (4.2.8)$$

Здесь мы пренебрегли экспоненциально малыми членами $e^{-1/\varepsilon} h_n(1)$.

Решения уравнений (4.2.4) с краевыми условиями (4.2.7) имеют вид

$$f_0 = \beta e^{1-x}, \quad h_0 = (\alpha - \beta e) e^x. \quad (4.2.9)$$

Подставив (4.2.9) в (4.2.5) и решив полученные уравнения при краевых условиях (4.2.8), получим

$$f_1 = \beta(1-x)e^{1-x}, \quad h_1 = [-\beta e + (\alpha - \beta e)x]e^x. \quad (4.2.10)$$

Подставляя решение первого порядка в (4.2.6) и решая полученные уравнения при краевых условиях (4.2.8), получим

$$f_2 = \frac{1}{2} \beta(1-x)(5-x)e^{1-x},$$

$$h_2 = \left[-\frac{5}{2} \beta e + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta e)x^2 \right] e^x. \quad (4.2.11)$$

Используя полученные решения, найдем разложение (4.2.3). Имеем

$$y = \beta \left[1 + \varepsilon(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)(5-x) \right] e^{1-x} +$$

$$+ \left\{ \alpha - \beta e + \varepsilon [-\beta e + (\alpha - \beta e)x] \right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[-\frac{5}{2} \beta e + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta e)x^2 \right] \left\{ e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon^3) \right\}. \quad (4.2.12)$$

Легко проверить, что внешнее разложение (предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном x) первых двух членов этого разложения дается выражением (4.1.49), а внутреннее разложение ($\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $\xi = x/\varepsilon$) дается выражением (4.1.76). Таким обра-

зом, метод составных разложений дает равномерно пригодное разложение непосредственно без определения внешнего и внутреннего разложений, сращения их и построения затем составного разложения.

Найдем теперь разложение для y с использованием метода Бромберга и Вишика и Люстерника. Предположим, что

$$y(x; \varepsilon) = F(x; \varepsilon) + G(\zeta; \varepsilon) = \\ = F_0(x) + G_0(\zeta) + \varepsilon [F_1(x) + G_1(\zeta)] + \varepsilon^2 [F_2(x) + G_2(\zeta)] + \dots, \quad (4.2.13)$$

причем функцией $G(\zeta; \varepsilon)$ вне внутренней области можно пренебречь (Бромберг [1956]), т. е. $G(\zeta; \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, поэтому

$$y^o(x; \varepsilon) = F(x; \varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + \varepsilon^2 F_2(x) + \dots \quad (4.2.14)$$

Поскольку $x = \varepsilon \zeta$, то

$$y^i(x; \varepsilon) = F_0(0) + G_0(\zeta) + \varepsilon [F'_0(0)\zeta + F_1(0) + G_1(\zeta)] + \\ + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} F''_0(0)\zeta^2 + F'_1(0)\zeta + F_2(0) + G_2(\zeta) \right] + \dots \quad (4.2.15)$$

Так как предполагается, что функцией $G(\zeta; \varepsilon)$ вне пограничного слоя можно пренебречь, то $F(x; \varepsilon)$ удовлетворяет граничному условию $y(1) = \beta$. Следовательно,

$$F_0(1) = \beta, \quad F_n(1) = 0 \text{ при } n \geq 1. \quad (4.2.16)$$

Граничному условию $y(0) = \alpha$ должна удовлетворять функция $F + G$, т. е.

$$F_0(0) + G_0(0) = \alpha, \quad F_n(0) + G_n(0) = 0 \text{ при } n \geq 1. \quad (4.2.17)$$

Чтобы найти уравнения для F_n , подставим (4.2.14) в (4.2.2а) и приравняем коэффициенты при равных степенях ε , предполагая x фиксированным. Получим

$$F'_0 + F_0 = 0, \quad (4.2.18)$$

$$F'_n + F_n = -F''_{n-1} \text{ при } n \geq 1. \quad (4.2.19)$$

Чтобы определить уравнение для G_n , выразим сначала (4.2.2а) через внутреннюю переменную ζ . Имеем

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} + \varepsilon y = 0. \quad (4.2.20)$$

Подставляя (4.2.15) в (4.2.20), приравнявая коэффициенты при равных степенях ε и считая ζ фиксированным, получим

$$G''_0 + G'_0 = 0, \quad (4.2.21)$$

$$G''_1 + G'_1 = -G_0 - F'_0(0) - F_0(0), \quad (4.2.22)$$

$$G''_2 + G'_2 = -G_1 - [F'_0(0) + F''_0(0)]\zeta - F''_0(0) - F_1(0) - F'_1(0). \quad (4.2.23)$$

Решение уравнения (4.2.18) при условии (4.2.16) имеет вид

$$F_0 = \beta e^{1-x}. \quad (4.2.24)$$

Следовательно, из (4.2.17) $G_0(0) = \alpha - \beta e$, и, таким образом, решение уравнения (4.2.21), стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$G_0 = (\alpha - \beta e) e^{-\xi}. \quad (4.2.25)$$

Решение уравнения (4.2.19) при краевом условии (4.2.16) в случае $n=1$ имеет вид

$$F_1 = \beta(1-x)e^{1-x}, \quad (4.2.26)$$

что вместе с условием (4.2.17) дает $G_1(0) = -\beta e$. Подставляя выражения для F_0 и G_0 в (4.2.22), получим

$$G_1'' + G_1' = -(\alpha - \beta e) e^{-\xi}.$$

Решение этого уравнения, подчиненное условию $G_1(0) = -\beta e$ и стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$G_1 = [(\alpha - \beta e)\xi - \beta e] e^{-\xi}. \quad (4.2.27)$$

Переходя ко второму порядку, получим, что решение уравнения (4.2.19) при условии (4.2.16) имеет вид

$$F_2 = \frac{1}{2} \beta(1-x)(5-x)e^{1-x}. \quad (4.2.28)$$

Поэтому из (4.2.17) получим $G_2(0) = -5\beta e/2$, и уравнение (4.2.23) примет вид

$$G_2'' + G_2' = -[(\alpha - \beta e)\xi - \beta e] e^{-\xi}.$$

Решение этого уравнения при условии $G_2(0) = -5\beta e/2$, стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$G_2 = \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta e) \xi^2 + (\alpha - 2\beta e) \xi - \frac{5}{2} \beta e \right] e^{-\xi}. \quad (4.2.29)$$

Таким образом, первые два члена результирующего равномерно пригодного разложения в точности совпадают с решением (4.1.81), полученным ранее с помощью метода сращивания асимптотических разложений.

4.2.2. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу, которая является частным случаем задачи, рассмотренной в п. 4.1.3:

$$ey'' + (2x+1)y' + 2y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.2.30)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \quad (4.2.31)$$

Поскольку коэффициент при y' положителен, неравномерность будет иметь место в окрестности $x=0$. Чтобы описать поведение y в области неоднородности, необходимо ввести преобразование растяжения $\xi = x\varepsilon^{-1}$ и внутреннее разложение описывать с помощью функции $e^{-\xi} = e^{-x/\varepsilon}$. Поскольку задача содержит переменные коэффициенты, то y имеет равномерно пригодное разложение вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x) + e^{-g(x)/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n(x), \quad (4.2.32)$$

где функция $g(x)$, которая определится при анализе, эквивалентна x при $x \rightarrow 0$. Подставляя (4.2.32) в (4.2.30) и (4.2.31) и приравнявая нулю коэффициенты при ε^n и $\varepsilon^n e^{-g(x)/\varepsilon}$ при всех n , получим уравнения для определения g , f_n и h_n . Первые три уравнения и краевые условия имеют вид

$$h_0 g' [g' - (2x + 1)] = 0, \quad (4.2.33)$$

$$(2x + 1) f_0' + 2f_0 = 0, \quad (4.2.34)$$

$$(-2g' + 2x + 1) h_0' + (2 - g'') h_0 = 0, \quad (4.2.35)$$

$$f_0(1) = \beta, \quad f_0(0) + h_0(0) = \alpha. \quad (4.2.36)$$

Чтобы существовало нетривиальное решение для h_0 , в силу (4.2.33) требуется, чтобы

$$g' = 0 \text{ или } g' = 2x + 1. \quad (4.2.37)$$

Первый случай (4.2.37) приводит к $g = \text{const}$ и должен быть отброшен, так как $g(x)/x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно,

$$g = x^2 + x. \quad (4.2.38)$$

Решение уравнения (4.2.34), подчиненное условию $f_0(1) = \beta$, имеет вид

$$f_0 = \frac{3\beta}{2x+1}. \quad (4.2.39)$$

Подставив (4.2.38) в (4.2.35) и решив полученное уравнение при условии (4.2.36), получим

$$h_0 = \alpha - 3\beta. \quad (4.2.40)$$

Поэтому

$$y = \frac{3\beta}{2x+1} + (\alpha - 3\beta) e^{-(x^2+x)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (4.2.41)$$

Рассмотрим далее применение второго варианта метода составных разложений в этой задаче. В этом случае можно применить (4.2.13)–(4.2.17). Подставляя (4.2.14) в (4.2.30), прирав-

нивая коэффициенты при равных степенях ε к нулю и полагая x фиксированным, получим

$$(2x+1)F'_0 + 2F_0 = 0, \quad (4.2.42)$$

$$(2x+1)F'_1 + 2F_1 = -F''_0. \quad (4.2.43)$$

Чтобы получить уравнение для G_n , выразим (4.2.30) через внутреннюю переменную $\xi = x/\varepsilon$. Имеем

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1 + 2\varepsilon\xi) \frac{dy}{d\xi} + 2y = 0. \quad (4.2.44)$$

Подставляя (4.2.15) в это уравнение, приравнявая коэффициенты при равных степенях ε и считая ξ фиксированным, получим

$$G''_0 + G'_0 = 0, \quad (4.2.45)$$

$$G''_1 + G'_1 = -2\xi G'_0 - 2G_0 - 2F_0(0) - F'_0(0). \quad (4.2.46)$$

Решение уравнения (4.2.42), подчиненное условию (4.2.16), имеет вид

$$F_0 = \frac{3\beta}{2x+1}. \quad (4.2.47a)$$

Это выражение вместе с (4.2.17) дает $G_0(0) = \alpha - 3\beta$. Следовательно, решение уравнения (4.2.45), стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$G_0 = (\alpha - 3\beta) e^{-\xi}. \quad (4.2.47b)$$

Подставляя выражение для F_0 в (4.2.43) и решая полученное уравнение при условии (4.2.16), придем к

$$F_1 = \frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3}. \quad (4.2.48)$$

Тогда (4.2.17) дает $G_1(0) = -16\beta/3$, а (4.2.46) принимает вид

$$G''_1 + G'_1 = 2(\alpha - 3\beta)(\xi - 1)e^{-\xi}.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$G_1 = -\left[\frac{16}{3}\beta + (\alpha - 3\beta)\xi^2\right] e^{-\xi}. \quad (4.2.49)$$

Поэтому

$$y = \frac{3\beta}{2x+1} + \varepsilon \frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3} + (\alpha - 3\beta) e^{-\xi} - \\ - \varepsilon \left[\frac{16}{3}\beta + (\alpha - 3\beta)\xi^2\right] e^{-\xi} + O(\varepsilon^2). \quad (4.2.50)$$

4.2.3. Краевая задача с начальными условиями для уравнения теплопроводности

В качестве третьего примера применения метода составных разложений рассмотрим краевую задачу с начальными условиями для уравнения теплопроводности, поставленную Келлером [1968]. Предположим, что температура $u(x, t; \varepsilon)$ зависит от одной пространственной переменной x , которая изменяется от 0 до $b(\varepsilon t)$, где b — известная функция, а ε — малый параметр. Таким образом, b — слабо меняющаяся функция t . Математически задача записывается в виде

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq b(\varepsilon t), \quad (4.2.51)$$

$$u(0, t) = \varphi(\varepsilon t), \quad u[b(\varepsilon t), t] = 0, \quad (4.2.52)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq b(0). \quad (4.2.53)$$

Заменив переменную t на $\tau = \varepsilon t$, уравнение (4.2.51) и краевые условия (4.2.52) перепишем в виде

$$\varepsilon u_\tau = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq b(\tau), \quad (4.2.54)$$

$$u(0, \tau) = \varphi(\tau), \quad u[b(\tau), \tau] = 0. \quad (4.2.55)$$

Поскольку ε умножается на u_τ , то прямое разложение метода возмущений при малом ε и фиксированном τ не может, вообще говоря, удовлетворить начальному условию (4.2.53) и неравномерно вблизи $\tau = 0$ всюду, за исключением окрестности концов. Чтобы описать поведение функции u в окрестности $t = 0$, необходимо применить преобразование растяжения $t = \tau/\varepsilon$. Как подтвердится ниже, функция, описывающая поведение в этой области, имеет вид $\exp[-g(\tau)/\varepsilon]$, где $g(\tau)/\tau \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow 0$. Поэтому предположим, что равномерно пригодное асимптотическое разложение для u имеет вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x, \tau) + e^{-g(\tau)/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n(x, \tau). \quad (4.2.56)$$

Подставляя это разложение в (4.2.53)–(4.2.55) и приравнявая к нулю коэффициенты при ε^n и $\varepsilon^n e^{-g(\tau)/\varepsilon}$ для всех n , получим

$$f_{0,xx} = 0, \quad f_0(0, \tau) = \varphi(\tau), \quad f_0[b(\tau), \tau] = 0, \quad (4.2.57)$$

$$h_{0,xx} + g'h_0 = 0, \quad h_0(0, \tau) = 0, \quad h_0[b(\tau), \tau] = 0, \quad (4.2.58)$$

$$f_0(x, 0) + h_0(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq b(0) \quad (4.2.59)$$

и при $n \geq 1$

$$f_{n,xx} = f_{n-1,\tau}, \quad f_n(0, \tau) = f_n[b(\tau), \tau] = 0, \quad (4.2.60)$$

$$h_{n,xx} + g'h_n = h_{n-1,\tau}, \quad h_n(0, \tau) = h_n[b(\tau), \tau] = 0, \quad (4.2.60)$$

$$h_{n,xx} + g'h_n = h_{n-1,\tau}, \quad h_n(0, \tau) = h_n[b(\tau), \tau] = 0, \quad (4.2.61)$$

$$f_n(x, 0) + h_n(x, 0) = 0, \quad (4.2.62)$$

где через g' обозначено $dg/d\tau$.

Решение задачи (4.2.57) имеет вид

$$f_0 = \varphi(\tau) \left[1 - \frac{x}{b(\tau)} \right]. \quad (4.2.63)$$

Поскольку краевые условия для h_0 однородны, то уравнение для h_0 имеет нетривиальное решение, только если g' равно одному из собственных значений

$$g'_k = \left[\frac{k\pi}{b(\tau)} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.64)$$

Соответствующие нормированные собственные функции имеют вид

$$\chi_k = \left[\frac{2}{b(\tau)} \right]^{1/2} \sin \frac{k\pi x}{b(\tau)}. \quad (4.2.65)$$

Следовательно,

$$h_0 = a_0(\tau) \chi_k(x, \tau), \quad (4.2.66)$$

где a_0 — неизвестная пока функция, которая определится при исследовании уравнения для h_1 .

При известном h_0 уравнение (4.2.61) в случае $n=1$ примет вид

$$\begin{aligned} h_{1,xx} + g'_k h_1 &= a'_0 \chi_k + a_0 \chi_{k,\tau}, \\ h_1(0, \tau) &= h_1[b(\tau), \tau] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

Предположим, что h_1 может быть разложено по собственным функциям χ_k , т. е.

$$h_1 = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(\tau) \chi_s(x, \tau). \quad (4.2.68)$$

Подставляя (4.2.68) в (4.2.67) и используя тот факт, что $\chi_{s,xx} = -g'_s \chi_s$, получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} (g'_k - g'_s) c_s \chi_s = a'_0 \chi_k + a_0 \chi_{k,\tau}. \quad (4.2.69)$$

Если мы теперь умножим это уравнение на χ_k и проинтегрируем от $x=0$ до $b(\tau)$, то правая часть обратится в нуль, так как χ_k ортогональна χ_s при $k \neq s$, а $g'_s = g'_k$ при $k = s$. Поэтому

$$\int_0^{b(\tau)} (a'_0 \chi_k^2 + a_0 \chi_{k,\tau} \chi_k) dx = 0. \quad (4.2.70)$$

Это является условием разрешимости задачи (4.2.67). Поскольку

$$\int_0^{b(\tau)} \chi_k^2 dx = 1, \quad (4.2.71)$$

то

$$\frac{d}{d\tau} \int_1^{b(\tau)} \chi_k^2 dx = 0 = b'(\tau) \chi_k^2[b(\tau), \tau] + 2 \int_0^{b(\tau)} \chi_k \chi_{k,\tau} dx = 0. \quad (4.2.72)$$

Так как $\chi_k[b(\tau), \tau] = 0$, то

$$\int_0^{b(\tau)} \chi_k \chi_{k,\tau} dx = 0. \quad (4.2.73)$$

Следовательно, (4.2.70) и (4.2.71) приводят к

$$a_0 = \text{const.} \quad (4.2.74)$$

Поэтому решение нулевого порядка имеет вид

$$u(x, \tau; \varepsilon) = \varphi(\tau) \left[1 - \frac{x}{b(\tau)} \right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{2}{b(\tau)} \right]^{1/2} \sin \frac{k\pi x}{b(\tau)} \exp \left[-\frac{k^2 \pi^2}{\varepsilon} \int_0^{\tau} b^{-2}(\xi) d\xi \right] + O(\varepsilon), \quad (4.2.75)$$

где a_k — постоянная, определяемая равенством

$$a_k = \left[\frac{2}{b(0)} \right]^{1/2} \int_0^{b(0)} \left\{ \psi(x) - \varphi(0) \left[1 - \frac{x}{b(0)} \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{b(0)} dx. \quad (4.2.76)$$

4.2.4. Ограничения метода составных разложений

При попытке применить метод Латты к нелинейным задачам могут возникнуть осложнения. Кроме того, могут возникнуть трудности, если для описания поведения рассматриваемой функции во внутренней области необходимо использовать большое число специальных функций. Несмотря на эти ограничения, этот метод является отправной точкой для развития метода многих масштабов, описанного в гл. 6.

Модифицированный метод составных разложений Бромберга, Вишика и Люстерника преодолевает эти осложнения, как будет показано на примере применения этого метода к нелинейному уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0, \quad (4.2.77)$$

описывающему одномерную задачу о космическом корабле Земля—Луна, которая изучалась в п. 4.1.7 с помощью метода сращивания асимптотических разложений.

Предположим, что составное разложение имеет вид

$$t(x; \mu) = F_0(x) + G_0(\xi) + \mu [F_1(x) + G_1(\xi)] + \dots, \quad (4.2.78)$$

где $\xi = (1-x)/\mu$ — внутренняя переменная, найденная в п. 4.1.7, и $G_n \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Начальное условие $t(0) = 0$ дает

$$F_0(0) = F_1(0) = 0. \quad (4.2.79)$$

Из (4.2.78) имеем

$$t^0 = F_0(x) + \mu F_1(x) + \dots \quad (4.2.80)$$

Это разложение, будучи подставленным в (4.2.77), дает

$$2F_0'^2 = x, \quad (4.2.81)$$

$$\frac{F_1'}{F_0'^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Решения этих уравнений, подчиненные условиям (4.2.79), имеют вид

$$\sqrt{2}F_0 = \frac{2}{3}x^{3/2},$$

$$\sqrt{2}F_1 = \frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}. \quad (4.2.82)$$

Из (4.2.78) и (4.2.82) следует

$$\sqrt{2}t^i = \frac{2}{3} + \sqrt{2}G_0(\xi) + \mu \left[-\xi + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu\xi}{4} + \sqrt{2}G_1(\xi) \right] + \dots \quad (4.2.83)$$

Чтобы определить G_0 и G_1 , перейдем в уравнении (4.2.77) к внутренней переменной ξ . Имеем

$$\frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{1-\mu\xi} + \frac{1}{\xi}. \quad (4.2.84)$$

Подставляя (4.2.83) в это уравнение и приравнявая коэффициенты при равных степенях μ , получим

$$G_0' = 0, \quad (4.2.85)$$

$$\left[\sqrt{2}G_1 + \frac{1}{2} \ln \xi - \xi \right]' = - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right)^{-1/2}. \quad (4.2.86)$$

Решение уравнения (4.2.85), стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, есть $G_0 = 0$, в то время как решение уравнения (4.2.86), стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\sqrt{2}G_1 = \xi - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \text{Arsh } \sqrt{\xi} - \frac{1}{2} \ln \xi + \frac{1}{2} - \ln 2. \quad (4.2.87)$$

Подставляя в (4.2.78) выражения для F_0 и F_1 из (4.2.82) и используя найденные значения G_0 и G_1 , получим разложение, в точности совпадающее с (4.1.202), которое было получено с помощью метода сращения асимптотических разложений.

Упражнения

4.1. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + y' &= 2x, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{aligned}$$

- (а) Определить трехчленное внешнее разложение.
 (б) Определить трехчленное внутреннее разложение.
 (в) Сратить оба эти разложения и построить составное разложение.
 (г) Определить трехчленное равномерно пригодное разложение, используя метод составных разложений (МСР) и сравнить результат с результатом (в).

4.2. Определить разложения второго порядка (трехчленные разложения) для задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - y' &= 2x, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \end{aligned}$$

используя а) метод сращения асимптотических разложений (МСАР) и б) МСР.

4.3. Определить равномерно пригодные разложения второго порядка для задач

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' \pm (2x + 1) y' + 2y &= 0, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \end{aligned}$$

используя а) МСАР, б) метод Латты и в) метод Бромберга — Вишика — Люстерника.

4.4. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - a(x) y' + b(x) y &= 0, \quad a(x) > 0, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \end{aligned}$$

используя а) МСАР и б) МСР.

4.5. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y''' - y' + y &= 0, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad y'(1) = \gamma. \end{aligned}$$

а) Показать, что пограничный слой существует у обоих концов и характеризуется преобразованиями растяжения

$$\eta = x/\varepsilon \quad \text{и} \quad \xi = (1-x)/\varepsilon.$$

б) Определить равномерно пригодное разложение второго порядка, используя МСАР.

в) Определить разложение второго порядка, используя МСР и полагая

$$y = F(x; \varepsilon) + G(\eta; \varepsilon) + H(\xi; \varepsilon),$$

где $G \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$ и $H \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

4.6. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка (двучленные равномерно пригодные разложения) для задачи (2.2.28)–(2.2.30), используя оба варианта МСР.

4.7. Показать, что МСАР не может быть использован для получения равномерно пригодного разложения для

$$\varepsilon^2 y'' + y = f(x), \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Можно ли из этого примера заключить, что МСАР неприменим к задачам колебаний?

4.8. Рассмотреть задачу, определяемую (2.2.28) при $a \leq r \leq b$ с граничными условиями

$$u(b) = b\alpha, \quad \frac{du}{dr}(b) = \alpha.$$

Определить двучленные равномерно пригодные разложения, используя а) МСАР и б) МСР.

4.9. Колебания балки с жестко закрепленными концами описываются уравнением

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda^2 u, \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0.$$

Определить разложение первого порядка при малых ε для u и λ .

4.10. Теплопередача в одномерном стационарном потоке без диссипации описывается краевой задачей (Ханкс [1971])

$$\varepsilon \frac{d^2 T}{dx^2} + x \frac{dT}{dx} - xT = 0, \\ T(0) = T_0, \quad T(1) = T_1.$$

Определить разложения первого порядка, используя а) МСАР и б) два варианта МСР.

4.11. Определить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения

$$(x + \varepsilon y) y' + (2 + x) y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1},$$

используя МСАР. Можно ли сделать вывод, что метод растянутых координат (МРК) является более пригодным к таким задачам?

4.12. Определить одночленные разложения для решения задач

$$\varepsilon y'' \pm (2x + 1) y' + y^2 = 0, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя МСАР и МСР.

4.13. Определить одночленные разложения для

$$y'' + a(x) y' + y^2 = 0, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя МСАР и МСР, если $a(x)$ а) отрицательно и б) положительно на интервале $0 \leq x \leq 1$.

4.14. Определить разложение первого порядка для задачи из предыдущего упражнения, если $a(x)$ имеет простой нуль μ , где $0 \leq \mu \leq 1$.

4.15. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' \pm y y' - y &= 0, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \end{aligned}$$

используя МСАР и МСР.

4.16. Ламинарный поток в канале с пористыми стенками в случае всасывания приводит к задаче (Праудмен [1960]; Террил и Шреста [1965])

$$\begin{aligned} \varepsilon f''' - f f'' + f'^2 &= c(\varepsilon), \\ f(0) &= 1 - \alpha = a, \quad f'(0) = 0, \\ f(1) &= 1, \quad f'(1) = 0. \end{aligned}$$

При положительных a : а) показать, что внешнее и внутреннее разложения первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} f^0 &= a \operatorname{ch} xb + \varepsilon f_1(x) + \dots, \\ f^i &= 1 + \varepsilon B(1 - \eta - e^{-\eta}) + \dots, \quad \eta = (1 - x)/\varepsilon, \\ \beta &= ab + \varepsilon \beta_1 + \dots, \quad x = -\beta^2, \end{aligned}$$

и определить b , B , β_1 и f_1 ; б) сформировать составное разложение; в) определить разложение первого порядка, используя МСР.

4.17. Рассмотреть задачу из предыдущего упражнения в случае $a < 0$.

а) Показать, что равномерно пригодное разложение дается выражениями

$$\begin{aligned} f^0 &= 1 - \alpha + \alpha x + \varepsilon f_1(x) + \dots, \\ f^i &= 1 + \alpha(1 - \eta - e^{-\eta}) + \dots, \quad \eta = (1 - x)/\varepsilon, \\ f^I &= a + \frac{\varepsilon \alpha}{\alpha - 1}(1 - \xi - e^{-\xi}) + \dots, \quad \xi = (\alpha - 1)x/\varepsilon, \\ \beta &= \alpha + \varepsilon \beta_1 + \dots, \quad c = \beta^2, \end{aligned}$$

и определить f_1 и β_1 .

б) Построить составное разложение.

в) Определить разложение первого порядка, используя МСР.

4.18. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x)u_x &= 0, \\ u(0, y) &= F_1(y), \quad u(1, y) = F_2(y), \\ u(x, 0) &= G_1(x), \quad u(x, 1) = G_2(x). \end{aligned}$$

а) Показать, что пограничный слой присутствует при $x=0$, если $a(x) > 0$, и при $x=1$, если $a(x) < 0$. В первом случае он характеризуется переменной $\xi = x/\varepsilon$, а во втором — $\xi = (1 - x)/\varepsilon$.

б) Найти уравнения, определяющие первые члены внешнего и внутреннего разложений, и сратить эти разложения.

в) Используя метод Латта, показать, что

$$u = A(x, y) + B(x, y)e^{-Q(x)/\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

где

$$Q(x) = \int_0^x a(x) dx \quad \text{при} \quad a(x) > 0$$

и

$$Q(x) = \int_x^1 a(x) dx \quad \text{при} \quad a(x) < 0.$$

Определить уравнения для A и B .

4.19. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + a(x, y)u_x + b(x, y)u &= 0, \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x), \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y). \end{aligned}$$

а) Найти уравнения для первых членов внешнего и внутреннего разложений и срастить эти разложения.

б) Использовать МСР для получения равномерно пригодного разложения первого порядка.

4.20. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \nabla^4 u + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u_y &= 0, \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x), \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y). \end{aligned}$$

Определить уравнения для первых членов внешнего и внутреннего разложений и срастить их.

4.21. Используя МСР, получить равномерное разложение при больших R для задачи (2.1.37)—(2.1.40), описывающей обтекание сферы.

Вариация произвольных постоянных и метод усреднения

5.1. Вариация произвольных постоянных

Эта методика первоначально была разработана для решения неоднородных линейных уравнений при условии, что известны общие решения соответствующих однородных уравнений. В качестве примера рассмотрим общее линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x). \quad (5.1.1)$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения. Будем искать решение уравнения (5.1.1) в виде

$$y = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x), \quad (5.1.2)$$

где функции A_1 и A_2 подлежат определению. Отметим, что в выражении для общего решения однородной задачи величины A_1 и A_2 являются постоянными, в неоднородном же случае они могут изменяться. Отсюда и название метода — „вариация произвольных постоянных“.

Дифференцирование (5.1.2) по x дает

$$y' = A_1y_1' + A_2y_2' + A_1'y_1 + A_2'y_2. \quad (5.1.3)$$

Поскольку для трех неизвестных функций (A_1, A_2, y) имеем всего два уравнения — (5.1.1) и (5.1.2), — то мы вольны наложить на A_1, A_2, y еще одно условие. Потребуем, чтобы

$$A_1'y_1 + A_2'y_2 = 0. \quad (5.1.4)$$

Тогда (5.1.3) примет вид

$$y' = A_1y_1' + A_2y_2'. \quad (5.1.5)$$

Дифференцирование (5.1.5) по x дает

$$y'' = A_1y_1'' + A_2y_2'' + A_1'y_1' + A_2'y_2'. \quad (5.1.6)$$

Подставляя в (5.1.1) выражения для y, y', y'' и используя тот факт, что y_1 и y_2 являются решениями соответствующего однородного уравнения, получим

$$A_1'y_1' + A_2'y_2' = R. \quad (5.1.7)$$

Решив систему (5.1.4), (5.1.7) относительно A'_1 и A'_2 , получим

$$A'_1 = -\frac{R(x) y_2(x)}{W(x)}, \quad (5.1.8)$$

$$A'_2 = \frac{R(x) y_1(x)}{W(x)}. \quad (5.1.9)$$

Величина $W(x)$ называется вронскианом и задается равенством

$$W(x) = y_1(x) y'_2(x) - y'_1(x) y_2(x). \quad (5.1.10)$$

Общее решение уравнения (5.1.1) примет вид

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \quad (5.1.11)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а частное решение y_p задается формулой

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{W(t)} R(t) dt. \quad (5.1.12)$$

Изложенная методика обобщена и может применяться для нахождения решений в задачах, где неоднородность представлена функцией как зависимой, так и независимой переменной. Причем зависимая переменная может входить в правую часть и нелинейным образом. Ниже будут рассмотрены два примера; первый из них — линейный, второй — нелинейный.

5.1.1. Решения уравнения Шредингера, зависящие от времени

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$H_0 \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -H_1 \psi \quad (5.1.13)$$

при однородных граничных условиях. Здесь H_0 и H_1 — линейные операторы, соответственно независимый и зависящий от времени. Предположим, что уравнение

$$H_0 \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.14)$$

при тех же однородных граничных условиях имеет решение

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\hbar} E_n. \quad (5.1.15)$$

Здесь a_n — постоянные, u_n и E_n — соответственно собственная функция и принадлежащее ей собственное значение задачи

$$H_0 u = E u \quad (5.1.16)$$

при тех же однородных условиях. Собственные функции u_n предполагаются ортонормированными в некоторой области D .

Следуя Дираку [1926], мы будем предполагать, что решения возмущенной задачи имеют тот же вид (5.1.15), но величины a_n меняются во времени. Подстановка (5.1.15) в (5.1.13) дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [H_0 u_n(x) - E_n u_n(x)] e^{-i\omega_n t} + \frac{h}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}]. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

В соответствии с (5.1.16) первое слагаемое в левой части этого уравнения обращается в нуль, и тогда (5.1.17) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}]. \quad (5.1.18)$$

Умножая (5.1.18) на $\bar{u}_m(x)$, интегрируя по области D и используя ортонормированность функций u_n , получим

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_m t} H_{1mn}, \quad (5.1.19)$$

где

$$H_{1mn} = \int_D \bar{u}_m(x) H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] dx. \quad (5.1.20)$$

Если H_1 не содержит производной по t , то (5.1.19) запишется в виде

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_{mn} t} \tilde{H}_{1mn}, \quad (5.1.21)$$

где

$$\omega_{mn} = \frac{2\pi}{h} (E_m - E_n), \quad \tilde{H}_{1mn} = \int_D \bar{u}_m(x) H_1 [u_n(x)] dx. \quad (5.1.22)$$

Уравнение (5.1.21) эквивалентно полной задаче, определяемой уравнением (5.1.13). Если H_1 является малым возмущением, то мы можем разложить a_m в ряд

$$a_m = a_{m0} + a_{m1} + a_{m2} + \dots, \quad (5.1.23)$$

где a_{m0} — постоянная, которая равна a_m при $t=0$, и выполнено $a_{mn} \ll a_{m(n-1)}$. Тогда первое приближение к a_m будет задаваться

уравнением

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} e^{i\omega_{mn}t} \tilde{H}_{1mn}. \quad (5.1.24)$$

Если, кроме того, будем иметь $a_{n0} = \delta_{nk}$, то (5.1.24) запишется в виде

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} e^{i\omega_{mk}t} \tilde{H}_{1mk}. \quad (5.1.25)$$

Положим, для примера,

$$H_1 \psi = \psi f(x) \sin \omega t. \quad (5.1.26)$$

Тогда

$$\tilde{H}_{1mk} = f_{mk} \sin \omega t = -\frac{1}{2} i f_{mk} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad (5.1.27)$$

где

$$f_{mk} = \int_D \bar{u}_m(x) f(x) u_k(x) dx.$$

Подставляя эти выражения в (5.1.25) и разрешая относительно a_{m1} , получим

$$a_{m1} = i \frac{\pi f_{mk}}{h} \left[\frac{e^{i(\omega_{mk} + \omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_{mk} - \omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} \right], \quad m \neq k. \quad (5.1.28)$$

5.1.2. Пример нелинейной устойчивости

Метод вариации произвольных постоянных в сочетании с разложением по собственным функциям был развит и широко применялся в нелинейных задачах об устойчивости следующими авторами: Стюартом [1958], [1960a, b], [1961], Ватсоном [1960], Экхаусом [1965], Рейнольдсом и Поттером [1967]. Эта методика приобрела единообразие и получила последовательное изложение благодаря Экхаусу [1965].

Для описания этой методики рассмотрим вслед за Экхаусом [1965] следующий пример:

$$L(\varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi), \quad (5.1.29)$$

где L — линейный, а $F(\varphi)$ — нелинейный операторы. Предположим, что L зависит от одной пространственной переменной, скажем, x , с областью изменения $0 \leq x \leq 1$, и что функция φ удовлетворяет линейным однородным граничным условиям

$$B_1(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad B_2(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (5.1.30)$$

Очевидно, что линейная задача

$$L(\varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.31)$$

при граничных условиях (5.1.30) допускает решение вида

$$\varphi = u(x) e^{-\lambda t}, \quad (5.1.32)$$

причем

$$L(u) + \lambda u = 0, \quad (5.1.33)$$

$$B_1(u) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad B_2(u) = 0 \quad \text{при } x = 1. \quad (5.1.34)$$

Предположим, что задача на собственное значение (5.1.33), (5.1.34) разрешима для счетного множества собственных значений λ_n (действительных или комплексных), соответствующих собственным функциям u_n . Собственные числа предполагаются отличными друг от друга и пронумерованными так, что $\operatorname{Re} \lambda_n > \operatorname{Re} \lambda_{n-1}$. Пусть L — самосопряженный оператор, так что собственные функции u_n являются взаимно ортогональными. Предположим, что они нормированы согласно условию

$$\int_0^1 u_n(x) \bar{u}_m(x) dx = \delta_{mn}. \quad (5.1.35)$$

Тогда общее решение линейной задачи запишется в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (5.1.36)$$

где a_n — постоянные, определяемые из начальных условий.

Предположим, что решение нелинейной задачи также выражается в виде (5.1.36) с a_n , зависящими от времени, и запишем его в форме

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x), \quad (5.1.37)$$

где принято $A_n = a_n \exp(-\lambda_n t)$. Подстановка (5.1.37) в (5.1.29) дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L[u_n(x)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dA_n}{dt}(t) u_n(x) = \\ = F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

Поскольку $L(u_n) = -\lambda_n u_n$, то (5.1.38) можно переписать в виде

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{dA_n(t)}{dt} + \lambda_n A_n(t) \right] u_n(x) = F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right]. \quad (5.1.39)$$

Помножая (5.1.39) на $\bar{u}_m(x)$, интегрируя от $x=0$ до $x=1$ с учетом условия ортонормированности (5.1.35), получим

$$\frac{dA_m}{dt} + \lambda_m A_m = - \int_0^1 F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \bar{u}_m(x) dx \quad (5.1.40)$$

для $m=1, 2, \dots$

Если L не является самосопряженным оператором, то собственные функции u_n не будут взаимно ортогональны. Однако можно определить сопряженный к L оператор M , удовлетворяющий условию

$$\psi_1 L(\psi_2) - \psi_2 M(\psi_1) = \frac{d}{dx} [P(\psi_1, \psi_2)], \quad (5.1.41)$$

где ψ_1, ψ_2 — функции x ; P — билинейная форма. С учетом этого определения сопряженную задачу можно задать с помощью уравнения

$$M\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = 0 \quad (5.1.42)$$

и граничных условий обращения в нуль формы $P(u, \tilde{u})$ в обеих точках $x=0$ и $x=1$. Тогда функции u_n и \tilde{u}_n окажутся ортогональными и могут быть нормированы условием

$$\int_0^1 u_n(x) \tilde{u}_m(x) dx = \delta_{mn}. \quad (5.1.43)$$

Данный случай рассматривается так же, как и самосопряженный с заменой $\bar{u}_m(x)$ на $\tilde{u}_m(x)$. В частности, (5.1.40) принимает вид

$$\frac{dA_m}{dt} + \lambda_m A_m = - \int_0^1 F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \tilde{u}_m(x) dx. \quad (5.1.44)$$

5.2. Метод усреднения¹⁾

5.2.1. Методика Ван-дер-Поля

В данном пункте описывается методика, развитая Ван-дер-Полем [1926] для исследования периодических решений уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} + \varepsilon k \lambda \cos \lambda t, \quad (5.2.1)$$

носящего его имя. Величина ε в (5.2.1) предполагается малой, λ (частота возбуждения) считается отличной от ω_0 (собственной частоты) на малую величину порядка ε . В этих предположениях решение уравнения (5.2.1) ищется в виде

$$u(t) = a_1(t) \cos \lambda t + a_2(t) \sin \lambda t, \quad (5.2.2)$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ предполагаются слабо меняющимися функциями времени, а именно $da_i/dt = O(\varepsilon)$, $d^2 a_i/dt^2 = O(\varepsilon^2)$.

Дважды продифференцировав (5.2.2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & -\lambda^2 a_1 \cos \lambda t - \lambda^2 a_2 \sin \lambda t - 2\dot{a}_1 \lambda \sin \lambda t + \\ & + 2\dot{a}_2 \lambda \cos \lambda t + \ddot{a}_1 \cos \lambda t + \ddot{a}_2 \sin \lambda t. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по времени. Подставим (5.2.2), (5.2.3) в (5.2.1) и отбросим члены, порядок которых выше ε , вспоминая, что $\dot{a}_i = O(\varepsilon)$ и $\ddot{a}_i = O(\varepsilon^2)$. Приравняв коэффициенты при $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$ в обеих частях, получим

$$2\dot{a}_1 + \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_2 - \varepsilon a_1 (1 - \rho) = 0, \quad (5.2.4)$$

$$2\dot{a}_2 - \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_1 - \varepsilon a_2 (1 - \rho) = \varepsilon k, \quad (5.2.5)$$

где принято обозначение

$$\rho = \frac{a^2}{4} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4}. \quad (5.2.6)$$

Обращаясь к изучению периодических решений уравнения (5.2.1), отметим, что они соответствуют стационарным решениям уравнений (5.2.4) и (5.2.5), т. е. соответствуют решениям уравнений

$$2\sigma a_{20} - a_{10} (1 - \rho_0) = 0, \quad (5.2.7)$$

$$-2\sigma a_{10} - a_{20} (1 - \rho_0) = k, \quad (5.2.8)$$

¹⁾ Более полное и строгое изложение асимптотических методов, связанных с усреднением, содержится в монографиях: Боголюбов, Митропольский [1974], Митропольский [1964], Моисеев [1969], Волосов, Моргунов [1971]. Обзор и библиографию работ по асимптотическим методам типа усреднения и их приложениям можно найти в упомянутых книгах, а также в обзорных статьях: Волосов, Моисеев, Моргунов, Черноусько [1965], Волосов [1968].— *Прим. ред.*

где σ — коэффициент расстройки, равный

$$\sigma = \frac{\lambda - \omega_0}{\varepsilon}. \quad (5.2.9)$$

В уравнениях (5.2.4), (5.2.5) опущены члены порядка $O(\varepsilon^2)$. Возведя обе части равенств (5.2.7) и (5.2.8) в квадрат, сложив их и учитывая (5.2.6), получим частотную характеристику

$$\rho_0 [4\sigma^2 + (1 - \rho_0)^2] = \frac{k^2}{4}. \quad (5.2.10)$$

5.2.2. Методика Крылова — Боголюбова

Рассмотрим эту методику применительно к общему слабо нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right). \quad (5.2.11)$$

При $\varepsilon = 0$ решение уравнения (5.2.11) записывается в виде

$$u = a \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (5.2.12)$$

где a и θ — постоянные. Для нахождения приближенного решения уравнения (5.2.11) при малом, но отличном от нуля ε Крылов и Боголюбов [1947] предположили, что решение имеет тот же вид (5.2.12) при условии, что

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \varphi, \quad \varphi = \omega_0 t + \theta, \quad (5.2.13)$$

и величины a и θ изменяются во времени. Таким образом, эта методика аналогична методике Ван-дер-Поля, обсуждавшейся в предыдущем пункте. Единственная разница заключена в виде первого члена.

Дифференцирование (5.2.12) по t дает

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \varphi + \frac{da}{dt} \cos \varphi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi.$$

Следовательно, с учетом (5.2.13) имеем

$$\frac{da}{dt} \cos \varphi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi = 0. \quad (5.2.14)$$

Дифференцирование (5.2.13) по t дает

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -a\omega_0^2 \cos \varphi - \omega_0 \frac{da}{dt} \sin \varphi - a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi.$$

Подставив это выражение в (5.2.11) и используя (5.2.12), получим

$$\omega_0 \frac{da}{dt} \sin \varphi + a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi = -\varepsilon f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi]. \quad (5.2.15)$$

Разрешая (5.2.14) и (5.2.15) относительно da/dt и $d\theta/dt$, будем иметь

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi], \quad (5.2.16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon \frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi]. \quad (5.2.17)$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение (5.2.11) относительно u заменено системой двух дифференциальных уравнений первого порядка (5.2.16) и (5.2.17) относительно амплитуды a и фазы θ .

Приступая к решению системы (5.2.16) и (5.2.17), заметим, что правые части ее уравнений периодичны по φ , и, следовательно, $da/dt = O(\varepsilon)$, $d\theta/dt = O(\varepsilon)$. Таким образом, a и θ — слабо меняющиеся функции времени (поскольку ε мало) и их изменение за время $T = 2\pi/\omega_0$, равное периоду правых частей, очень мало. Усредняя (5.2.16) и (5.2.17) по интервалу $[t, t+T]$, в течение которого величины a и θ в правых частях этих уравнений могут считаться постоянными, получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} f_1(a), \quad (5.2.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} g_1(a). \quad (5.2.19)$$

Здесь принято обозначение

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] d\varphi, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] d\varphi. \quad (5.2.21)$$

Отметим, что f_1 и g_1 являются попросту двумя коэффициентами в разложении в ряд Фурье функции f .

В качестве примера рассмотрим уравнение Дюффинга (2.1.1), в котором

$$f(u, \dot{u}) = -u^3. \quad (5.2.22)$$

Следовательно,

$$f_1(a) = 0, \quad g_1(a) = -\frac{3}{4}a^3. \quad (5.2.23)$$

Тогда из (5.2.18) следует, что a — постоянная, а из (5.2.19), — что

$$\theta = \frac{3}{8}\varepsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0. \quad (5.2.24)$$

Поэтому в первом приближении имеем

$$u = a \cos \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8}\varepsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} \right] t + O(\varepsilon). \quad (5.2.25)$$

В качестве второго примера рассмотрим осциллятор Ван дер-Поля, в котором

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \frac{du}{dt}. \quad (5.2.26)$$

В этом случае имеем

$$f_1 = -\omega_0 a \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right), \quad g_1 = 0. \quad (5.2.27)$$

Из (5.2.19) следует, что $\theta = \theta_0$ — постоянная, в то время как

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right). \quad (5.2.28)$$

Интегрируя (5.2.28), получим

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}. \quad (5.2.29)$$

В основе метода Леверье [1856] лежит та же идея, что и в данной методике.

5.2.3. Обобщенный метод усреднения

Рассматриваемая методика трактует равенства (5.2.12) и (5.2.13) как преобразование переменных u и du/dt к переменным a и φ , при котором выполнено

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Переменная φ называется быстро вращающейся фазой. Мы не будем интегрировать эти уравнения, как это сделали в преды-

дущем пункте, а определим почти тождественное преобразование (см. Боголюбов и Митропольский [1951], стр. 412)

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon a_1(\bar{a}, \bar{\varphi}) + \varepsilon^2 a_2(\bar{a}, \bar{\varphi}) + \dots, \\ \varphi &= \bar{\varphi} + \varepsilon \varphi_1(\bar{a}, \bar{\varphi}) + \varepsilon^2 \varphi_2(\bar{a}, \bar{\varphi}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

переменных a, φ к переменным $\bar{a}, \bar{\varphi}$, которое периодически по $\bar{\varphi}$ с периодом 2π и приводит систему (5.2.30) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon A_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{a}) + \dots, \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{a}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

где A_i и B_i не зависят от $\bar{\varphi}$. В указанной процедуре a и φ вовсе не обязаны быть скалярными функциями (Меттлер [1959]; Сетна [1963]; Моррисон [1966в]). Эффекты высших порядков были получены Волосовым [1961], [1962], Мьюзеном [1965], Забрейко и Ледовской [1966]. Крускал [1962] предложил преобразование, обратное к (5.2.31); основываясь на этой процедуре, Стерн [1970в] разработал алгоритм последовательного получения высших приближений. Стерн [1971в] использовал эту методику при изучении медленно меняющихся возмущенных систем.

Подставив (5.2.31), (5.2.32) в (5.2.30), разлагая по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения вида

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\varphi}} + A_n &= F_n(\bar{a}, \bar{\varphi}), \\ \omega_0 \frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\varphi}} + B_n &= G_n(\bar{a}, \bar{\varphi}), \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

в которых правые части являются известными функциями членов более низкого порядка в (5.2.31) и (5.2.32). В общем случае величины F_n и G_n содержат быстропериодические члены (обозначаемые верхним индексом s) и медленно меняющиеся члены (обозначаемые верхним индексом l). Выберем A_n и B_n равными медленно меняющимся членам, т. е. положим

$$A_n = F_n^l, \quad B_n = G_n^l. \quad (5.2.34)$$

Тогда придем к уравнениям

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\varphi}} = F_n^s, \quad \omega_0 \frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\varphi}} = G_n^s, \quad (5.2.35)$$

которые последовательно разрешаются относительно a_n и φ_n .

В качестве примера рассмотрим осциллятор Ван-дер-Поля,

в котором

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \dot{u}, \quad \omega_0 = 1.$$

В этом случае уравнения (5.2.30) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{8} \varepsilon [a(4 - a^2) - 4a \cos 2\varphi + a^3 \cos 4\varphi], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 + \frac{1}{8} \varepsilon [2(2 - a^2) \sin 2\varphi - a^2 \sin 4\varphi]. \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

Подставив (5.2.31), (5.2.32) в (5.2.36) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для членов, имеющих

порядок ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \varphi} + A_1 &= \frac{1}{8} \bar{a} (4 - \bar{a}^2) - \frac{1}{2} \bar{a} \cos 2\bar{\varphi} + \frac{1}{8} \bar{a}^3 \cos 4\bar{\varphi}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} + B_1 &= \frac{1}{4} (2 - \bar{a}^2) \sin 2\bar{\varphi} - \frac{1}{8} \bar{a}^2 \sin 4\bar{\varphi}; \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

порядок ε^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + A_2 &= -\frac{\partial a_1}{\partial a} A_1 - \frac{\partial a_1}{\partial \varphi} B_1 + \\ &+ \frac{1}{8} a_1 [4 - 3\bar{a}^2 - 4 \cos 2\bar{\varphi} + 3\bar{a}^2 \cos 4\bar{\varphi}] + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{a} \varphi_1 [2 \sin 2\bar{\varphi} - \bar{a}^2 \sin 4\bar{\varphi}], \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} + B_2 &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial a} A_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} B_1 - \\ &- \frac{1}{4} \bar{a} a_1 (2 \sin 2\bar{\varphi} + \sin 4\bar{\varphi}) + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi_1 [(2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\varphi} - \bar{a}^2 \cos 4\bar{\varphi}]. \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Приравнявая A_1 и A_2 медленно меняющимся членам в правой части (5.2.37), получим

$$A_1 = \frac{1}{8} \bar{a} (4 - \bar{a}^2), \quad B_1 = 0. \quad (5.2.40)$$

После этого система (5.2.37) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} \bar{a} \cos 2\bar{\varphi} + \frac{1}{8} \bar{a}^3 \cos 4\bar{\varphi}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} &= \frac{1}{4} (2 - \bar{a}^2) \sin 2\bar{\varphi} - \frac{1}{8} \bar{a}^2 \sin 4\bar{\varphi} \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

и имеет своим решением

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{4} \bar{a} \sin 2\bar{\varphi} + \frac{1}{32} \bar{a}^3 \sin 4\bar{\varphi}, \\ \varphi_1 &= -\frac{1}{8} (2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\varphi} + \frac{1}{32} \bar{a}^2 \cos 4\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

С учетом (5.2.40) и (5.2.42) уравнения (5.2.38) и (5.2.39) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + A_2 &= \text{быстропериодические члены}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} + B_2 &= -\frac{1}{8} + \frac{3}{16} \bar{a}^2 - \frac{11}{256} \bar{a}^4 + \text{быстропериодические члены}. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Приравнявая A_2 и B_2 медленно меняющимся членам в правых частях системы (5.2.43), получим

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16} \bar{a}^2 - \frac{11}{256} \bar{a}^4. \quad (5.2.44)$$

Поэтому с точностью до второго порядка имеем

$$u = a \cos \varphi, \quad (5.2.45)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} - \frac{1}{4} \varepsilon \bar{a} \left[\sin 2\bar{\varphi} - \frac{1}{8} \bar{a}^2 \sin 4\bar{\varphi} \right] + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\varphi} &= \bar{\varphi} - \frac{1}{8} \varepsilon \left[(2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\varphi} - \frac{1}{4} \bar{a}^2 \cos 4\bar{\varphi} \right] + O(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{1}{8} \varepsilon \bar{a} (4 - \bar{a}^2) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \left[1 - \frac{3}{2} \bar{a}^2 + \frac{11}{32} \bar{a}^4 \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

Это решение находится в полном соответствии с решением, которое получено в п. 5.7.4 с помощью алгоритма Кемела.

Для канонических систем преобразование (5.2.31), (5.2.32) можно осуществить в более изящной форме, если применить процедуру фон Цайпеля (§ 5.6) или ряды и преобразования Ли (п. 5.7.5). Последний способ представляет собой простой и эффективный алгоритм, основанный на рекурсивном применении нескольких элементарных операций, и является поэтому очень удобным для расчетов на ЭВМ. С помощью преобразований Ли (§ 5.7) был сформулирован эффективный рекурсивный алгоритм для неканонических систем.

5.3. Методика Страбла

Страбл [1962] развил методику для рассмотрения слабо нелинейных колебательных систем, описываемых уравнением

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}, t). \quad (5.3.1)$$

Он выразил при малом ε асимптотическое решение этого уравнения в виде

$$u = a \cos(\omega_0 t - \theta) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (5.3.2)$$

где a и θ — слабо меняющиеся функции времени. Если положить каждое $u_n = 0$, то (5.3.2) примет вид того решения, которое Крылов и Боголюбов использовали для получения первого приближения к u (см. п.5.2.2). Мы не будем проводить выкладки для функции общего вида f , а зададимся лишь частным видом ее, соответствующим уравнению Дюффинга.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\varepsilon u^3. \quad (5.3.3)$$

Подставляя (5.3.2) в (5.3.3), получим

$$\begin{aligned} & \left[2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cos(\omega_0 t - \theta) + \\ & + \left[-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \sin(\omega_0 t - \theta) + \\ & + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 \right) + \dots = \\ & = -\varepsilon a^3 \cos^3(\omega_0 t - \theta) - 3\varepsilon^2 u_1 a^2 \cos^2(\omega_0 t - \theta) + \dots \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Если, учитывая члены порядка до $O(\varepsilon)$, приравняем коэффициенты при $\cos(\omega_0 t - \theta)$ и $\sin(\omega_0 t - \theta)$ в обеих частях уравнения (5.3.4), то получим следующие так называемые уравнения в вариациях:

$$2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{3}{4} \varepsilon a^3, \quad (5.3.5)$$

$$-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (5.3.6)$$

После этого будем иметь следующее так называемое уравнение возмущения:

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 = -\frac{1}{4} a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta). \quad (5.3.7)$$

В первом порядке по ϵ уравнения (5.3.5), (5.3.6) сводятся к виду ¹⁾

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{8\omega_0} \epsilon a^2. \quad (5.3.8)$$

Следовательно,

$$a = a_0, \quad \theta = -\frac{3}{8\omega_0} \epsilon a_0^2 t + \theta_0, \quad (5.3.9)$$

где a_0, θ_0 — постоянные. Тогда решение уравнения (5.3.7) в первом порядке по ϵ можно получить, считая a и θ постоянными. Пропедев это, получим

$$u_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta). \quad (5.3.10)$$

Следовательно, решение первого порядка имеет вид

$$u = a \cos(\omega_0 t - \theta) + \frac{1}{32\omega_0^2} \epsilon a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta), \quad (5.3.11)$$

где a и θ задаются равенствами (5.3.9).

При известном u_1 для второго слагаемого из правой части (5.3.4) имеем

$$-3\epsilon^2 u_1 a^2 \cos^2(\omega_0 t - \theta) = -\frac{3}{128\omega_0^2} \epsilon^2 a^5 [\cos(\omega_0 t - \theta) + \\ + 2 \cos 3(\omega_0 t - \theta) + \cos 5(\omega_0 t - \theta)]. \quad (5.3.12)$$

Кроме того, для следующего шага нужно вычислить члены порядка $O(\epsilon)$ в выражении $(d^2 u_1 / dt^2) + \omega_0^2 u_1$, т. е. нужно рассмотреть слагаемое

$$\frac{9}{16\omega_0} a^3 \frac{d\theta}{dt} \cos 3(\omega_0 t - \theta). \quad (5.3.13)$$

Учитывая теперь члены порядка до $O(\epsilon^2)$, получим уравнения в вариациях

$$2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{3}{4} \epsilon a^3 - \frac{3}{128\omega_0^2} \epsilon^2 a^5, \quad (5.3.14)$$

$$-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5.3.15)$$

и уравнение возмущения

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 = -\frac{3}{128\omega_0^2} \epsilon^2 a^5 [2 \cos 3(\omega_0 t - \theta) + \cos 5(\omega_0 t - \theta)] - \\ - \frac{9}{16\omega_0 \epsilon} a^3 \frac{d\theta}{dt} \cos 3(\omega_0 t - \theta). \quad (5.3.16)$$

¹⁾ Точнее, уравнения (5.3.5), (5.3.6) будут удовлетворены с точностью до членов порядка ϵ , если положить в них (5.3.8). — Прим. ред.

Отправляясь от (5.3.9), методом последовательных приближений можно получить следующие решения для (5.3.14) и (5.3.15):

$$a = a_0, \quad \theta = -\frac{3}{8\omega_0} \varepsilon a_0^2 t + \frac{15}{256\omega_0^3} \varepsilon^2 a_0^4 t + \theta_0 + O(\varepsilon^3), \quad (5.3.17)$$

в которых a_0 и θ_0 — постоянные. Найдя из (5.3.9) $d\theta/dt$, подставив в (5.3.16) и разрешив получающееся уравнение, получим с точностью до членов $O(\varepsilon)$

$$u_2 = -\frac{21}{1024\omega_0^4} a^5 \cos 3(\omega_0 t - \theta) + \frac{1}{1024\omega_0^4} a^5 \cos 5(\omega_0 t - \theta). \quad (5.3.18)$$

Отсюда будем иметь для решения второго порядка

$$u = a \cos(\omega t - \theta_0) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \frac{21\varepsilon}{32\omega_0^2} a^2 \right) \cos 3(\omega t - \theta_0) + \\ + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t - \theta_0) + O(\varepsilon^3), \quad (5.3.19)$$

где

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0^2} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^4} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (5.3.20)$$

Чтобы получить решение третьего порядка, нужно вычислить члены порядка $O(\varepsilon^2)$ в $d^2 u_1/dt^2$ и члены порядка $O(\varepsilon)$ в $d^2 u_2/dt^2$ и затем составить уравнения в вариациях и уравнение возмущения. Это обстоятельство является главным ограничением в применении изложенной методики. Вторым ограничением является способ решения уравнения в вариациях — метод последовательных приближений. Систематический путь к рассмотрению подобных задач указывают методика Линдштедта — Пуанкаре (п.3.1.1), методика Крылова — Боголюбова — Митропольского (§ 5.4), ряды и преобразования Ли (§ 5.7) и метод многих масштабов, рассмотренный в гл. 6.

5.4. Методика Крылова — Боголюбова — Митропольского ¹⁾

В ходе уточнения первого приближения к решению уравнения (5.2.11), рассмотренного в п.5.2.2, Крылов и Боголюбов [1947] развили методику определения решения в любом приближении. Боголюбов и Митропольский [1961] углубили и обосновали эту методику, Митропольский [1965] распространил ее на случай нестационарных колебаний. Они рассматривали асимптотическое разложение вида

$$u = a \cos \psi + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(a, \psi) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (5.4.1)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 180. — *Прим. ред.*

в котором каждое u_n является периодической функцией ψ периода 2π , а величины a и ψ изменяются во времени согласно уравнениям

$$\frac{da}{dt} = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n A_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (5.4.2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \psi_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (5.4.3)$$

причем функции u_n , A_n и ψ_n подбирались таким образом, чтобы функция (5.4.1) при условиях (5.4.2), (5.4.3) удовлетворяла дифференциальному уравнению (5.2.11). Для однозначного определения A_n и ψ_n потребуем, чтобы все u_n не содержали $\cos \psi$. Производные преобразуются согласно равенствам

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (5.4.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{\partial}{\partial a} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \psi} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{dA_n}{da} = \\ &= \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{d\psi_n}{da} = \\ &= \varepsilon^2 A_1 \frac{d\psi_1}{da} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Далее эта техника иллюстрируется применением ее к уравнениям Дюффинга, Ван-дер-Поля и Клейна—Гордона.

5.4.1. Уравнение Дюффинга

Рассмотрим нелинейный осциллятор

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\varepsilon u^3, \quad (5.4.8)$$

который ранее изучался в п. 3.1.1, 5.2.2, § 5.3. Подставляя (5.4.1) — (5.4.7) в (5.4.8) и приравнявая коэффициенты при равных

степенях ε до ε^2 включительно, получим

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_1 = 2\omega_0 \psi_1 a \cos \psi + 2\omega_0 A_1 \sin \psi - a^3 \cos^3 \psi, \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_2 = & \left[(2\omega_0 \psi_2 + \psi_1^2) a - A_1 \frac{dA_1}{da} \right] \cos \psi + \\ & + \left[2(\omega_0 A_2 + A_1 \psi_1) + a A_1 \frac{d\psi_1}{da} \right] \sin \psi - \\ & - 3u_1 a^2 \cos^2 \psi - 2\omega_0 \psi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi}. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Чтобы u_1 оказалась периодической функцией, в правой части (5.4.9) должны исчезнуть те слагаемые, которые порождают вековые члены. Поскольку $\cos^3 \psi = (3 \cos \psi + \cos 3\psi)/4$, то это условие дает

$$A_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0}. \quad (5.4.11)$$

Тогда решением уравнения (5.4.9) является функция

$$u_1 = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi. \quad (5.4.12)$$

Подставляя это решение первого порядка в (5.4.10), получим

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_2 = & \left(2\omega_0 \psi_2 + \frac{15a^4}{128\omega_0^2} \right) a \cos \psi + \\ & + 2\omega_0 A_2 \sin \psi + \frac{a^5}{128\omega_0^2} (21 \cos 3\psi - 3 \cos 5\psi). \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Вековые члены будут исключены при условии

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = -\frac{15a^4}{256\omega_0^3}. \quad (5.4.14)$$

Тогда решение уравнения (5.4.13) будет иметь вид

$$u_2 = \frac{-a^5}{1024\omega_0^4} (21 \cos 3\psi - \cos 5\psi). \quad (5.4.15)$$

Поэтому будем иметь для u с точностью до второго порядка

$$\begin{aligned} u = & a \cos \psi + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi - \\ & - \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} (21 \cos 3\psi - \cos 5\psi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

причем

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \text{или } a = a_0 = \text{const}, \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \omega_0 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^3} + O(\varepsilon^3), \\ \psi = & \omega_0 \left[1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0^2} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^4} \right] t + \psi_0 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

где ψ_0 — постоянная. Это решение согласуется с решением (5.3.19), (5.3.20), полученным методом Страбла.

5.4.2. Осциллятор Ван-дер-Поля

Далее мы рассмотрим нелинейный осциллятор

$$\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u}, \quad (5.4.19)$$

изученный в п. 5.2.2 и 5.2.3. Подставляя (5.4.1) — (5.4.7) в (5.4.19) и приравнявая коэффициенты при равных степенях ε до ε^2 включительно, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 = & 2\psi_1 a \cos \psi + 2A_1 \sin \psi - \\ & - a \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) \sin \psi + \frac{1}{4} a^3 \sin 3\psi, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 = & \left[(2\psi_2 + \psi_1^2) a - A_1 \frac{dA_1}{da} \right] \cos \psi + \\ & + \left[2(A_2 + A_1 \psi_1) + a A_1 \frac{d\psi_1}{da} \right] \sin \psi - \\ & - 2\psi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + (1 - a^2 \cos^2 \psi) \times \\ & \times \left(A_1 \cos \psi - a \psi_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + a^2 u_1 \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Вековые члены будут исключены, если на правую часть в (5.4.20) наложить условия

$$\psi_1 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right). \quad (5.4.22)$$

Следовательно,

$$u_1 = -\frac{a^3}{32} \sin 3\psi. \quad (5.4.23)$$

Имея это решение, можем переписать (5.4.21) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 = & \left[2a\psi_2 - A_1 \frac{dA_1}{da} + \left(1 - \frac{3}{4} a^2\right) A_1 + \frac{a^5}{128} \right] \cos \psi + \\ & + 2A_2 \sin \psi + \frac{a^3(a^2 + 8)}{128} \cos 3\psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi. \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Чтобы в u_2 не было вековых членов, положим

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = \frac{A_1}{2a} \left(\frac{dA_1}{da} - 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) - \frac{a^4}{256}. \quad (5.4.25)$$

Следовательно,

$$u_2 = -\frac{5a^5}{3072} \cos 5\psi - \frac{a^3(a^2 + 8)}{1024} \cos 3\psi. \quad (5.4.26)$$

Поэтому с точностью до второго порядка решение имеет вид

$$u = a \cos \psi - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3\psi - \frac{\varepsilon^2 a^3}{1024} \left[\frac{5}{3} a^2 \cos 5\psi + (a^2 + 8) \cos 3\psi \right] + O(\varepsilon^3), \quad (5.4.27)$$

причем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right), \quad a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}, \quad (5.4.28)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{A_1}{2a} \left(\frac{dA_1}{da} - 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) - \frac{a^4}{256} \right], \quad (5.4.29)$$

где a_0 — постоянная. Используя (5.4.22) и (5.4.28), можем переписать (5.4.29) в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{\varepsilon}{8a} \left(1 - \frac{7}{4} a^2 \right) \frac{da}{dt}.$$

Следовательно,

$$\psi = t - \frac{\varepsilon^2}{16} t - \frac{\varepsilon}{8} \ln a + \frac{7\varepsilon}{64} a^2 + \varphi_0, \quad (5.4.30)$$

где φ_0 — постоянная.

5.4.3. Уравнение Клейна — Гордона

В качестве третьего примера рассмотрим, следуя Монтгомери и Тидману [1964], нелинейные волны, описываемые уравнением

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \lambda^2 u = \varepsilon f(u, u_t, u_x). \quad (5.4.31)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (5.4.31) допускает решение вида

$$u = a \cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi), \quad (5.4.32)$$

где a и φ — постоянные, а k_0 и ω_0 удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + \lambda^2. \quad (5.4.33)$$

Для малого, но конечного ε будем искать разложение вида

$$u = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \dots, \quad (5.4.34)$$

где a слабо меняется в зависимости от времени и состояния согласно уравнениям

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad (5.4.35)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots, \quad (5.4.36)$$

α — новая фазовая переменная, совпадающая с фазой в (5.4.32) при $\varepsilon = 0$ и удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega_0 + \varepsilon C_1(\alpha) + \varepsilon^2 C_2(\alpha) + \dots, \quad (5.4.37)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = k_0 + \varepsilon D_1(\alpha) + \varepsilon^2 D_2(\alpha) + \dots. \quad (5.4.38)$$

В данном случае вновь ни одно u_n не содержит основной тон $\cos \psi$.

Подставляя (5.4.34) — (5.4.38) в (5.4.31), используя (5.4.33) и приравнявая коэффициенты при ε в обеих частях, получим

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) = & -2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1) \sin \psi - \\ & -2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) \cos \psi + \\ & + f[a \cos \psi, a\omega_0 \sin \psi, -ak_0 \sin \psi]. \end{aligned} \quad (5.4.39)$$

Разложим теперь функцию f в ряд Фурье по переменной ψ

$$\begin{aligned} f[a \cos \psi, a\omega_0 \sin \psi, -ak_0 \sin \psi] = \\ = g_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\alpha) \sin n\psi + g_n(\alpha) \cos n\psi]. \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

Исключая вековые члены, придем к равенствам

$$2\omega_0 A_1 + 2c^2 k_0 B_1 = f_1(\alpha), \quad (5.4.41)$$

$$2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) = g_1(\alpha). \quad (5.4.42)$$

Тогда решение уравнения (5.4.39) имеет вид

$$u_1 = \frac{g_0(\alpha)}{\lambda^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(\alpha) \sin n\psi + g_n(\alpha) \cos n\psi}{\lambda^2(1-n^2)}. \quad (5.4.43)$$

Подставляя A_1 , B_1 , C_1 и D_1 из (5.4.35) — (5.4.38) в (5.4.41) и (5.4.42), получим

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon \frac{f_1(\alpha)}{2\omega_0}, \quad (5.4.44)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} = \varepsilon \frac{g_1(\alpha)}{2a\omega_0}, \quad (5.4.45)$$

где $\omega'_0 = d\omega_0/dk_0$ — групповая скорость, а

$$\beta = \psi - k_0 x + \omega_0 t. \quad (5.4.46)$$

При $f_1 = 0$ будем иметь

$$a = h_1(x - \omega'_0 t), \quad (5.4.47)$$

$$\beta = \varepsilon(x + \omega'_0 t) \frac{g_1(\alpha)}{4a\omega_0\omega_0} + h_2(x - \omega'_0 t), \quad (5.4.48)$$

где h_1 и h_2 определяются из начальных или граничных условий. Уравнения (5.4.44) и (5.4.45) могут быть легко решены, если a и β являются функциями только времени, или только состояния.

5.5. Метод усреднения с использованием канонических переменных

Рассмотрим консервативную динамическую систему, описываемую следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.5.1)$$

где $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ — вектор обобщенных координат, t — независимая переменная, а точка над буквой означает дифференцирование по t . Далее $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \equiv T - V$ представляет собой лагранжиан, T и V — кинетическую и потенциальную энергии соответственно. Определим вектор обобщенных импульсов $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ равенством

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.5.2)$$

а гамильтониан H равенством

$$H = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L, \quad (5.5.3)$$

где \mathbf{p}^T — результат транспонирования \mathbf{p} (если \mathbf{p} — вектор-столбец, то \mathbf{p}^T — вектор-строка). Считая H функцией только от \mathbf{p} , \mathbf{q} и t , можем записать

$$dH = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (5.5.4)$$

Из (5.5.3) имеем также

$$dH = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.5.5)$$

Согласно (5.5.2), второе и третье слагаемые в правой части (5.5.5) сокращаются. Кроме того, из (5.5.1) и (5.5.2) следует, что $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$, поэтому (5.5.5) можно переписать в виде

$$dH = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^N \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.5.6)$$

Сравнив (5.5.4) с (5.5.6), получаем следующие канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (5.5.7)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.5.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.5.9)$$

Эти уравнения заменяют уравнения Лагранжа.

При переходе от переменных \mathbf{q} и \mathbf{p} к переменным $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ уравнения (5.5.7), (5.5.8) преобразуются к виду

$$\dot{Q}_i = f_i(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \quad (5.5.10)$$

$$\dot{P}_i = g_i(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t). \quad (5.5.11)$$

Если существует функция $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, такая, что

$$f_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad (5.5.12)$$

то (5.5.10) и (5.5.11) записываются в виде

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad (5.5.13)$$

\mathbf{Q} и \mathbf{P} называются *каноническими переменными*. Переход от \mathbf{q} и \mathbf{p} к \mathbf{Q} и \mathbf{P} называется каноническим преобразованием относительно функции K .

Каноническое преобразование может быть получено с помощью так называемой производящей функции $S(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ в соответствии с равенствами (см., например, Голдстейн [1965], гл. 8; Мейрович [1970], гл. 9¹⁾)

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}. \quad (5.5.14)$$

Коль скоро эти уравнения будут разрешены относительно $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, функция K выразится через H следующим образом:

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (5.5.15)$$

Если удастся найти каноническое преобразование, такое, что $K \equiv 0$, то, согласно второму соотношению в (5.5.13), вектор \mathbf{P} будет постоянным. Поскольку из первого соотношения в (5.5.14)

¹⁾ Подробнее о канонических преобразованиях и уравнениях Гамильтона — Якоби см. в книге Гантмахер [1966]. — *Прим. ред.*

имеем $p_i = \partial S / \partial q_i$, то функция S должна удовлетворять следующему так называемому уравнению Гамильтона — Якоби:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, q_2, \dots, q_N, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.5.16)$$

Если S — полный интеграл уравнения (5.5.16), то соотношения (5.5.14) доставляют общее решение системы уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.5.17)$$

Для функции H общего вида невозможно получить полный интеграл уравнения (5.5.16). Пусть, однако, $H = H_0 + \tilde{H}$, где \tilde{H} мало по сравнению с H_0 и найден полный интеграл $S_0(P_1, \dots, P_N, q_1, \dots, q_N, t)$ для уравнения

$$H_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N, t\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \quad (5.5.18)$$

Тогда с помощью метода усреднения и метода вариации произвольных постоянных может быть получено приближенное решение уравнений (5.5.17). Рассмотрим в качестве производящей функции

$$S = S_0(P_1, \dots, P_N, q_1, \dots, q_N, t), \quad (5.5.19)$$

где вектор \mathbf{P} не постоянен, а меняется во времени. Тогда \mathbf{P} и \mathbf{Q} определяются уравнениями

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad (5.5.20)$$

где с учетом (5.5.18)

$$K = H_0 + \tilde{H} + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \tilde{H}. \quad (5.5.21)$$

Пусть решение $\mathbf{q}_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, $\mathbf{p}_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ системы (5.5.17) при $H = H_0$ периодически по t с периодом T . Тогда приближенное решение системы (5.5.17) опять-таки задается величинами \mathbf{q}_0 и \mathbf{p}_0 , в которых, однако, \mathbf{P} и \mathbf{Q} меняются согласно (5.5.20), причем в последних уравнениях функция K заменена своим средним значением по периоду T , т. е. значением

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) dt. \quad (5.5.22)$$

В (5.5.22) векторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} предполагаются постоянными.

Далее мы проиллюстрируем эту технику на трех частных примерах.

5.5.1. Уравнение Дюффинга

Вновь рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \varepsilon q^3 = 0. \quad (5.5.23)$$

Этому уравнению соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) + \frac{1}{4} \varepsilon q^4. \quad (5.5.24)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega_0^2 q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.5.25)$$

Это уравнение может быть решено разделением переменных. Полагая

$$S = S_1(q) + \sigma(t), \quad (5.5.26)$$

получи . вместо (5.5.25)

$$\dot{\sigma} = -\alpha, \quad \text{или} \quad \sigma = -\alpha t, \quad (5.5.27)$$

$$\left(\frac{dS_1}{dq} \right)^2 + \omega_0^2 q^2 = 2\alpha, \quad \text{или} \quad S_1 = \int \sqrt{2\alpha - \omega_0^2 q^2} dq. \quad (5.5.28)$$

Следовательно,

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha - \omega_0^2 q^2} dq, \quad (5.5.29)$$

где α —новый импульс. Соответственно новая координата β задается равенством

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \int (2\alpha - \omega_0^2 q^2)^{-1/2} dq = -t + \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 q}{\sqrt{2\alpha}}, \quad (5.5.30)$$

откуда получаем

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega_0} \sin \omega_0 (t + \beta). \quad (5.5.31)$$

Это решение можно было бы написать сразу по виду уравнения (5.5.23) при $\varepsilon = 0$. Однако канонические переменные α и β были найдены естественным путем при решении уравнения Гамильтона—Якоби (5.5.25).

Поскольку $\tilde{H} = (1/4) \varepsilon q^4 = (\varepsilon \alpha^2 / \omega_0^4) \sin^4 \omega_0 (t + \beta)$, то уравнения в вариациях (5.5.20) записываются в виде

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha}. \quad (5.5.32a)$$

Из вида

$$\tilde{H} = \frac{\varepsilon \alpha^2}{\omega_0^4} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 (t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0 (t + \beta) \right]$$

получаем

$$\langle \tilde{H} \rangle = \frac{3\varepsilon \alpha^2}{8\omega_0^4}. \quad (5.5.326)$$

Следовательно, имеем из (5.5.32a)

$$\alpha = \text{const}, \quad \beta = \frac{3\varepsilon \alpha}{4\omega_0^4} t + \beta_0, \quad (5.5.33)$$

где β_0 — постоянная. Поэтому в первом приближении будем иметь

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega_0} \sin \left[\omega_0 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon \alpha}{\omega_0^4} \right) t + \omega_0 \beta_0 \right], \quad (5.5.34)$$

что согласуется с разложениями, полученными в п. 5.4.1 и § 5.3 с помощью методик Крылова — Боголюбова — Митропольского и Страбла, если отождествить $\sqrt{2\alpha}/\omega_0$ с a_0 .

5.5.2. Уравнение Матьё

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) q = 0 \quad (5.5.35)$$

при положительном ω . Положив

$$\dot{q} = p, \quad (5.5.36)$$

получим из (5.5.35)

$$\dot{p} = -(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) q. \quad (5.5.37)$$

Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (5.5.38)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{1}{2} \varepsilon q^2 \cos 2t. \quad (5.5.39)$$

Действуя как в п. 5.5.1, получим для (5.5.38) при $\varepsilon = 0$ решение

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \cos \omega (t + \beta). \quad (5.5.40)$$

Следовательно, $\tilde{H} = (1/2) \varepsilon q^2 \cos 2t = (\varepsilon \alpha / \omega^2) \cos 2t \cos^2 \omega(t + \beta)$, и уравнения в вариациях (5.5.20) запишутся в виде

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha}. \quad (5.5.41)$$

Из представления

$$\tilde{H} = \frac{\varepsilon \alpha}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] \right\}$$

получаем

$$\langle \tilde{H} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \text{ далеко от } 1 \\ \frac{\varepsilon \alpha}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta], & \text{если } \omega - 1 = O(\varepsilon) \end{cases}. \quad (5.5.42)$$

Если в (5.5.42) имеет место первый случай, то α и β в первом приближении являются постоянными. Если имеет место второй случай, введем новые канонические переменные α^* и β^* с помощью производящей функции

$$S^* = \alpha^* [(\omega - 1)t + \omega\beta]. \quad (5.5.43)$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\partial S^*}{\partial \beta} = \omega \alpha^*, \quad (5.5.44)$$

$$\beta^* = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha^*} = (\omega - 1)t + \omega\beta. \quad (5.5.45)$$

Следовательно, α^* и β^* являются каноническими переменными относительно гамильтониана

$$K = \langle \tilde{H} \rangle + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{\varepsilon \alpha^*}{4\omega} \cos 2\beta^* + (\omega - 1) \alpha^*. \quad (5.5.46)$$

Поэтому

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = \frac{\varepsilon \alpha^*}{2\omega} \sin 2\beta^*, \quad (5.5.47)$$

$$\dot{\beta}^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = \omega - 1 + \frac{\varepsilon}{4\omega} \cos 2\beta^*. \quad (5.5.48)$$

Исключив t из (5.5.47) и (5.5.48), получим

$$\frac{d\alpha^*}{\alpha^*} = -\frac{\frac{\varepsilon}{4\omega} d(\cos 2\beta^*)}{\omega - 1 + \frac{\varepsilon}{4\omega} \cos 2\beta^*}.$$

Следовательно,

$$\ln \alpha^* = -\ln \left[\omega - 1 + \frac{\varepsilon}{4\omega} \cos 2\beta^* \right] + \text{const.} \quad (5.5.49)$$

Таким образом, движение неустойчиво (α^* не ограничено), если

$$\frac{\varepsilon}{4\omega} > |\omega - 1|.$$

В первом приближении имеем

$$\omega < 1 + \frac{1}{4}\varepsilon \quad \text{или} \quad \omega > 1 - \frac{1}{4}\varepsilon. \quad (5.5.50)$$

Кривые

$$\omega = 1 \pm \frac{1}{4}\varepsilon \quad \text{или} \quad \omega^2 = 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon \quad (5.5.51)$$

отделяют на плоскости ω — ε области устойчивости от областей неустойчивости. Эти кривые согласуются с кривыми, полученными в п. 3.1.2 с помощью метода Линдштедта—Пуанкаре и в п.3.1.3 с помощью метода Уиттекера.

5.5.3. Качающаяся пружина

Следуя Кейну и Кану [1968], рассмотрим нелинейные колебания пружины, качающейся в вертикальной плоскости, как показано на рис. 5.1. Эту задачу ввели в рассмотрение Витт и

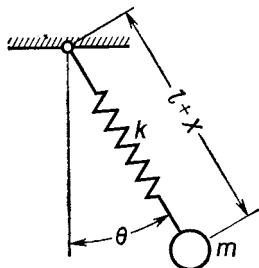


Рис. 5.1.

Горелик [1933] для иллюстрации внутреннего резонанса. Кинетическая и потенциальная энергии массы m равны соответственно

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l + x)^2 \dot{\theta}^2], \quad (5.5.52)$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + mg(l + x)(1 - \cos \theta), \quad (5.5.53)$$

где x —удлинение пружины относительно длины в положении равновесия. Отсюда

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l + x)^2 \dot{\theta}^2] - mg(l + x)(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} k x^2. \quad (5.5.54)$$

Для импульсов и гамильтониана имеем следующие выражения:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+x)^2 \dot{\theta}, \quad (5.5.55)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m(l+x)^2} \right] + mg(l+x)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} kx^2. \end{aligned} \quad (5.5.56)$$

Для малых x и θ и при $x=O(\theta)$ можно записать следующее разложение для H :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{ml^2} \right] + \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mgx\theta^2 - \\ &\quad - \frac{xp_\theta^2}{ml^3} - \frac{1}{24} mgl\theta^4 + \frac{3x^2p_\theta^2}{2ml^4} + O(\theta^5). \end{aligned} \quad (5.5.57)$$

Если сохранить в H квадратичные члены, то полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона—Якоби можно получить так. Уравнение Гамильтона—Якоби в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + kx^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + mgl\theta^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (5.5.58)$$

где $S = S(x, \theta, t)$. Положив

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + W_1(x) + W_2(\theta), \quad (5.5.59)$$

придем к уравнениям

$$\frac{1}{m} \left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 + kx^2 = 2\alpha_1, \quad (5.5.60)$$

$$\frac{1}{ml^2} \left(\frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 + mgl\theta^2 = 2\alpha_2. \quad (5.5.61)$$

Имеем поэтому

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)}, \quad (5.5.62)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)}, \quad (5.5.63)$$

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + \int \sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)} dx + \int \sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)} d\theta. \quad (5.5.64)$$

Следовательно,

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{mdx}{\sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin x \sqrt{\frac{k}{2\alpha_1}}, \quad (5.5.65)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -t + \int \frac{ml^2 d\theta}{\sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)}} = -t + \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin \theta \sqrt{\frac{mgl}{2\alpha_2}} \quad (5.5.66)$$

и, далее,

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{k}} \sin B_1, \quad (5.5.67)$$

$$\theta = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{mgl}} \sin B_2, \quad (5.5.68)$$

$$p_x = \sqrt{2m\alpha_1} \cos B_1, \quad (5.5.69)$$

$$p_\theta = l \sqrt{2m\alpha_2} \cos B_2, \quad (5.5.70)$$

где приняты обозначения

$$B_i = \omega_i(t + \beta_i), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

В первом приближении уравнения в вариациях записываются с помощью¹⁾

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2} mgx\theta^2 - \frac{xp_\theta^2}{m l^3} = \\ &= -\frac{\alpha_2}{l} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2k}} \left\{ \sin B_1 + \frac{3}{2} \sin(B_1 + 2B_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1 - 2\omega_2\beta_2] \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.71)$$

Таким образом, \tilde{H} — быстро меняющаяся величина, если только не выполнено $\omega_1 - 2\omega_2 = \varepsilon$, где ε — малая величина. В последнем случае медленно меняющаяся часть \tilde{H} имеет вид

$$\langle \tilde{H} \rangle = -\frac{3}{2l} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2k}} \alpha_2 \sin(\varepsilon t + \omega_1\beta_1 - 2\omega_2\beta_2). \quad (5.5.72)$$

Чтобы исключить явную зависимость $\langle \tilde{H} \rangle$ от t , сделаем еще одно каноническое преобразование переменных α_1 и β_1 к переменным α_1^* и β_1^* с помощью производящей функции

$$S^*(\alpha_1^*, \beta_1, t) = \frac{\varepsilon \alpha_1^*}{2\omega_2} t + \frac{\omega_1}{2\omega_2} \alpha_1^* \beta_1. \quad (5.5.73)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial S^*}{\partial \beta_1} = \frac{\omega_1}{2\omega_2} \alpha_1^*, \\ \beta_1^* &= \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_1^*} = \frac{\varepsilon}{2\omega_2} t + \frac{\omega_1}{2\omega_2} \beta_1, \end{aligned} \quad (5.5.74)$$

$$K = \langle \tilde{H} \rangle + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{\varepsilon \alpha_1^*}{2\omega_2} - \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 k}} \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \sin 2\omega_2 (\beta_1^* - \beta_2). \quad (5.5.75)$$

¹⁾ Выражение (5.5.71) содержит члены третьего порядка малости по каноническим переменным из гамильтониана (5.5.57). — *Прим. ред.*

Поскольку $\partial K / \partial t = 0$, то K — постоянная. Уравнения в вариациях записываются в виде

$$\dot{\alpha}_1^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta_1^*} = 2\omega_2 C \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \cos \gamma, \quad (5.5.76)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\frac{\partial K}{\partial \beta_2} = -2\omega_2 C \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \cos \gamma, \quad (5.5.77)$$

$$\dot{\beta}_1^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha_1^*} = \frac{\varepsilon}{2\omega_2} - \frac{1}{2} C \alpha_2 \alpha_1^{*-1/2} \sin \gamma, \quad (5.5.78)$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = -C \sqrt{\alpha_1^*} \sin \gamma, \quad (5.5.79)$$

где

$$C = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 k}}, \quad \gamma = 2\omega_2 (\beta_1^* - \beta_2). \quad (5.5.80)$$

Меттлер [1959] и Сетна [1965] с помощью метода усреднения получили уравнения, сходные с (5.5.76) — (5.5.80).

Сложив уравнения (5.5.76) и (5.5.77) и проинтегрировав, получим

$$\alpha_1^* + \alpha_2 = E = \text{const}. \quad (5.5.81)$$

Следовательно, движение полностью ограничено¹⁾. Исключая γ из (5.5.75) и (5.5.77), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{\alpha}_2}{2\omega_2} \right)^2 &= C^2 \alpha_2^2 (E - \alpha_2) - \left[\frac{\varepsilon (E - \alpha_2)}{2\omega_2} - K \right]^2 = \\ &= C^2 [F^2(\alpha_2) - G^2(\alpha_2)], \end{aligned} \quad (5.5.82)$$

где

$$F = \pm \alpha_2 \sqrt{E - \alpha_2}, \quad G = \frac{1}{C} \left[\frac{\varepsilon (E - \alpha_2)}{2\omega_2} - K \right]. \quad (5.5.83)$$

Функции $F(\alpha_2)$ и $G(\alpha_2)$ схематически показаны на рис. 5.2. Для реального движения величина G^2 не должна превосходить F^2 . Точки, в которых значения G и F равны, соответствуют обращению в нуль обеих производных $\dot{\alpha}_2$ и $\dot{\alpha}_1^*$. Кривая типа G_1 , которая пересекает обе ветви графика функции F или одну ветвь в двух различных точках, соответствует периодическому движению для фаз и амплитуд и, следовательно, соответствует непериодическому движению. Решение для фаз и амплитуд может быть выражено в эллиптических функциях Якоби. Однако точки,

¹⁾ В самом деле, из соотношений (5.5.81), (5.5.74), (5.5.60), (5.5.61) вытекает ограниченность обеих координат x , θ . — Прим. ред.

в которых кривая G_2 касается ветвей графика функции F , соответствуют периодическим движениям, при которых нелинейность настраивает частоты ω_1 и ω_2 на точный резонанс.

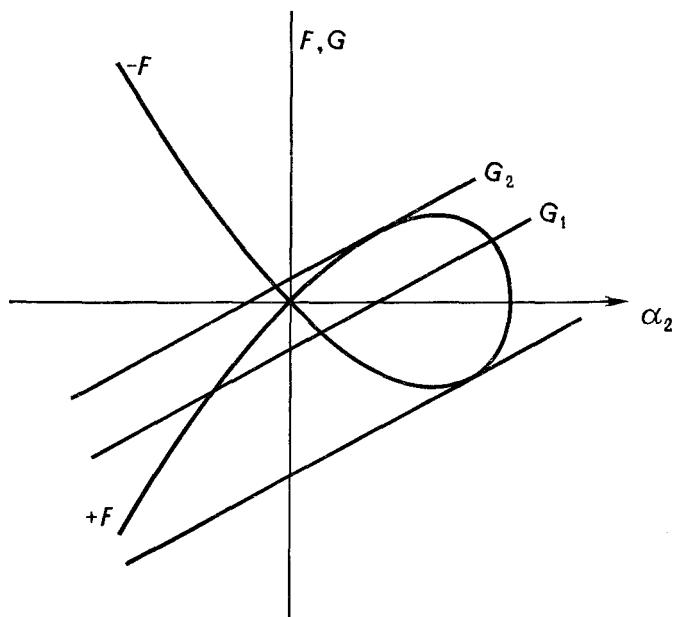


Рис. 5.2.

5.6. Методика фон Цайпеля

В § 5.5 для определения первого приближения в гамильтоновых системах использовался метод вариации произвольных постоянных в сочетании с методом усреднения. Фон Цайпель [1916] предложил методику для нахождения высших приближений. В этом параграфе дается ее описание и рассматривается ее применение к первым двум примерам предыдущего параграфа. Суть этой методики состоит в разложении производящей функции S в ряд по степеням малого параметра ε , $S = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n$, и в последовательном определении S_n как решений цепочки дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H(p, q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n(p, q, t), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (5.6.1)$$

где \mathbf{q} — вектор обобщенных координат, а \mathbf{p} — сопряженный вектор импульсов. Пусть $S_0 = S_0(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ — полный интеграл уравнения

Гамильтона — Якоби

$$H_0 \left[\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t \right] + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad (5.6.2)$$

и пусть $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ — решения уравнений

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S_0}{\partial P_i}. \quad (5.6.3)$$

Предположим, что векторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} не постоянны, а меняются во времени, и выберем функцию $S = S_0(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ в качестве производящей функции для перехода от канонических переменных \mathbf{p} и \mathbf{q} к каноническим переменным \mathbf{P} и \mathbf{Q} . Тогда гамильтониан H преобразуется к виду¹⁾

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H_n[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{H}_n(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t). \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Следовательно, \mathbf{P} и \mathbf{Q} описываются уравнениями в вариациях

$$\dot{\mathbf{P}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \quad (5.6.5)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t). \quad (5.6.6)$$

Для определения приближенного решения уравнений (5.6.5), (5.6.6) с точностью любого порядка введем в рассмотрение почти тождественное преобразование канонических переменных \mathbf{P} и \mathbf{Q} в канонические переменные \mathbf{P}^* и \mathbf{Q}^* с помощью производящей функции

$$S = \sum_{i=1}^N P_i^* Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n S_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t). \quad (5.6.7)$$

Так что

$$P_i = P_i^* + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial Q_i}(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t), \quad (5.6.8)$$

¹⁾ Согласно общей формуле (5.5.15). — Прим. ред.

а гамильтониан \tilde{H} преобразуется к виду

$$K \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n K_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{H}_n \left[\left(\mathbf{P}^* + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{\partial S_m}{\partial \mathbf{Q}} \right), \mathbf{Q}, t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial t}. \quad (5.6.9)$$

Для определения K_n разложим при малом ε правую часть в (5.6.9) и затем приравняем коэффициенты при равных степенях ε в обеих частях. Получим уравнения

$$K_1 = \tilde{H}_1(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (5.6.10)$$

$$K_2 = \tilde{H}_2(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \mathbf{P}_i}(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_2}{\partial t}, \quad (5.6.11)$$

$$K_n = F_n + \frac{\partial S_n}{\partial t}, \quad (5.6.12)$$

где $F_n = F_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t)$ — известная функция от $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_n$ и S_1, S_2, \dots, S_{n-1} . Функции S_n остались неопределенными и могут быть выбраны по нашему усмотрению. Поскольку в общем случае F_n содержит быстропериодическое слагаемое F_n^s и медленно меняющееся слагаемое F_n^l , то можно положить

$$K_n = F_n^l, \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} = -F_n^s. \quad (5.6.13)$$

Таким образом, K_n содержит только медленно меняющееся слагаемое, в то время как S_n содержит только быстропериодическое слагаемое. Функции S_n могут быть найдены последовательным решением цепочки дифференциальных уравнений в частных производных из (5.6.13).

В основе рассматриваемой методики и обобщенного метода усреднения п.5.2.3 лежит одна и та же идея. Стерн [1971b] показал, что для гамильтоновых систем методики Крускала и фон Цайпеля эквивалентны. В обеих методиках вводятся почти тождественные преобразования старых зависимых переменных, которые содержат быстропериодические и медленные слагаемые, к новым зависимым переменным, которые содержат медленно меняющиеся слагаемые. Основное различие между двумя методиками состоит в том, что в методе фон Цайпеля преобразование должно быть каноническим, в то время как обобщенный метод усреднения не предполагает преобразование каноническим, а систему — гамильтоновой. Моррисон [1966b] показал, что вплоть до второго порядка процедура фон Цайпеля представляет собой

частный случай обобщенного метода усреднения. Джакалья [1964] вывел разложение для произвольного порядка; Баррар [1970] исследовал сходимость в методике фон Цайпеля, Мьюзен [1965] показал, что с помощью операторов Фаа де Бруно [1857] уравнения, определяющие разложение, записываются в компактной форме. Ниже выводятся разложения второго порядка для первых двух примеров, обсуждавшихся в предыдущем параграфе.

5.6.1. Уравнение Дюффинга

В качестве первого примера рассмотрим уравнение Дюффинга (5.5.23), которое соответствует гамильтониану (5.5.24). В п.5.5.1 было найдено, что решение задачи, соответствующей H_0 , задается соотношением (5.5.31). Следовательно,

$$\tilde{H} = \frac{\varepsilon \alpha^2}{\omega_0^4} \sin^4 \omega_0 (t + \beta), \quad (5.6.14)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha}. \quad (5.6.15)$$

Чтобы найти приближенное решение уравнения (5.6.15), введем в рассмотрение почти тождественное преобразование переменных α и β к переменным α^* и β^* , задаваемое с помощью производящей функции

$$S = \alpha^* \beta + \varepsilon S_1(\alpha^*, \beta, t) + \varepsilon^2 S_2(\alpha^*, \beta, t) + \dots \quad (5.6.16)$$

Следовательно,

$$\alpha = \alpha^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + \dots, \quad (5.6.17)$$

а гамильтониан \tilde{H} преобразуется к виду

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n K_n(\alpha^*, \beta, t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega_0^4} \sin^4 \omega_0 (t + \beta) \left[\alpha^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + \dots \right]^2 + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

Приравняв коэффициенты при равных степенях ε в обеих частях, получим

$$K_1 = \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^4} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (5.6.19)$$

$$K_2 = \frac{2\alpha^*}{\omega_0^4} \frac{\partial S_1}{\partial \beta} \sin^4 \omega_0(t + \beta) + \frac{\partial S_2}{\partial t}. \quad (5.6.20)$$

Положив K_1 равным медленному слагаемому в правой части (5.6.19), будем иметь

$$K_1 = \frac{3\alpha^{*2}}{8\omega_0^4}. \quad (5.6.21)$$

Следовательно, (5.6.19) принимает вид

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^4} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] = 0. \quad (5.6.22)$$

Решением уравнения (5.6.22) является функция

$$S_1 = \frac{\alpha^{*2}}{4\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta) \right]. \quad (5.6.23)$$

Уравнение (5.6.20) при этом значении S_1 переписывается в виде

$$K_2 = \frac{\alpha^{*3}}{\omega_0^8} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] \sin^4 \omega_0(t + \beta) + \frac{\partial S_2}{\partial t}. \quad (5.6.24)$$

Приравняв K_2 медленному слагаемому в правой части этого уравнения, получим

$$K_2 = -\frac{17\alpha^{*3}}{64\omega_0^8}. \quad (5.6.25)$$

Следовательно, будем иметь во втором порядке

$$K = \varepsilon \frac{3\alpha^{*2}}{8\omega_0^4} - \varepsilon^2 \frac{17\alpha^{*3}}{64\omega_0^8} \quad (5.6.26)$$

и, далее,

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = 0, \quad \text{или } \alpha^* = \text{const}, \quad (5.6.27)$$

$$\dot{\beta}^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = \frac{3}{4} \varepsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} - \frac{51}{64} \varepsilon^2 \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^8},$$

откуда

$$\beta^* = \left(\frac{3}{4} \varepsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} - \frac{51}{64} \varepsilon^2 \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^8} \right) t + \frac{\beta_0}{\omega_0}, \quad (5.6.28)$$

где β_0 — постоянная.

Поскольку S_1 найдено, то имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots = \\ &= \alpha^* + \varepsilon \frac{\alpha^{*2}}{2\omega_0^4} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.6.29)$$

$$\begin{aligned} \beta^* &= \beta + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} + \dots = \\ &= \beta + \varepsilon \frac{\alpha^*}{2\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

Разрешив уравнения (5.6.29), (5.6.30) относительно α и β , получим для них следующую зависимость от α^* и β^* :

$$\alpha = \alpha^* + \frac{\varepsilon \alpha^{*2}}{2\omega_0^4} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta^*) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta^*) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (5.6.31)$$

$$\beta = \beta^* - \frac{\varepsilon \alpha^*}{2\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta^*) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta^*) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (5.6.32)$$

Для сравнения этих разложений с разложениями, полученными с помощью других методов, подставим α и β вида (5.6.31) и (5.6.32) в равенство (5.6.31) и разложим его при малом ε , предполагая α^* и β^* фиксированными. Получим

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} \right) \sin(\omega t + \beta_0) - \varepsilon \frac{\sqrt{2\alpha^*}\alpha^*}{16\omega_0^5} \sin 3(\omega t + \beta_0) + O(\varepsilon^2), \quad (5.6.33)$$

где

$$\omega = \omega_0(1 + \beta^*). \quad (5.6.34)$$

Положив

$$a = \frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} \right),$$

будем иметь

$$\frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} = a + \frac{3}{16} \varepsilon \frac{\alpha^3}{\omega_0^2} + O(\varepsilon^2). \quad (5.6.35)$$

Следовательно,

$$q = a \sin(\omega t + \beta_0) - \frac{1}{32} \varepsilon \frac{\alpha^3}{\omega_0^2} \sin^3(\omega t + \beta_0) + O(\varepsilon^2), \quad (5.6.36)$$

где

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8} \varepsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} - \frac{15}{256} \varepsilon^2 \frac{a^4}{\omega_0^4} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.37)$$

Это разложение согласуется с разложением, полученным в § 5.3 с помощью метода Страбла, и с разложением, полученным в п. 5.4.1 с помощью метода Крылова—Боголюбова—Митропольского.

5.6.2. Уравнение Матьё

Ниже будет построено разложение второго порядка для уравнения Матьё (5.5.35), которое соответствует гамильтониану (5.5.39). Решение, соответствующее H_0 , может быть записано в виде (см.

п. 5.5.1)

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \cos \omega(t + \beta), \quad p = -\sqrt{2\alpha} \sin \omega(t + \beta). \quad (5.6.38a)$$

Следовательно, α и β являются каноническими переменными относительно гамильтониана ¹⁾

$$\tilde{H} = \frac{\varepsilon \alpha}{\omega^2} \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t. \quad (5.6.38б)$$

Перейдя с помощью производящей функции (5.6.16) от переменных α и β к переменным α^* и β^* , с учетом (5.6.17) будем иметь

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \dots = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^2} \left(\alpha^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots \right) \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (5.6.39)$$

Приравняв в (5.6.39) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\alpha^*}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] \right\}, \end{aligned} \quad (5.6.40)$$

$$K_2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta} \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t. \quad (5.6.41)$$

В зависимости от того, находятся ли значения ω вблизи от 1 (резонанс) или вдали от нее, следует рассмотреть два случая. Начав со второго, мы рассмотрим далее оба случая.

Случай, когда ω принимает значения вдали от 1. В этом случае все слагаемые в правой части (5.6.40) являются быстро-периодическими. Следовательно, $K_1 = 0$ и

$$S_1 = -\frac{\alpha^*}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} + \frac{\sin 2[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{2(\omega - 1)} \right\}. \quad (5.6.42)$$

Подставляя это значение S_1 в (5.6.41), получим

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{4\omega^3} \cos^2 \omega(t + \beta) \times \\ &\times \cos 2t \left\{ \frac{\cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{\omega + 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{\omega - 1} \right\} = \\ &= \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{16\omega^3} \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]}{\omega - 1} + \frac{\cos 2[(\omega + 2)t + \omega\beta]}{\omega + 1} + \right. \\ &+ \frac{\cos 4[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} + \frac{\cos 4[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{2(\omega - 1)} + \\ &+ \omega \frac{\cos 4\omega(t + \beta) + \cos 4t + 2 \cos 2\omega(t + \beta)}{\omega^2 - 1} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.43)$$

¹⁾ См. п. 5.5.2, уравнения (5.5.41).— Прим. ред.

Если значения ω находятся также вдали от 2, то имеем

$$K_2 = -\frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha^*}{\omega^2 (\omega^2 - 1)}, \quad (5.6.44)$$

поскольку остальные слагаемые в правой части (5.6.43) являются быстропериодическими и в совокупности должны быть приравнены — $\partial S_2 / \partial t$. В этом случае будем иметь

$$K = -\frac{1}{16} \varepsilon^2 \frac{\alpha^*}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.45)$$

Следовательно,

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = 0 \text{ или } \alpha^* = \text{const}, \quad (5.6.46)$$

$$\dot{\beta}^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = -\frac{1}{16} \frac{\varepsilon^2}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + O(\varepsilon^3) \quad (5.6.47)$$

и, далее,

$$\beta^* = -\frac{1}{16} \frac{\varepsilon^2 t}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + \beta_0, \quad (5.6.48)$$

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega} \cos \omega \left\{ \left[1 - \frac{1}{16} \frac{\varepsilon^2}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} \right] t + \beta_0 \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.49)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае координата q ограничена и движение устойчиво.

Для значений ω , близких к 2, величина $\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]$ меняется медленно и должна быть включена в K_2 ; в противном случае в выражении для S_2 будут содержаться вековые члены или малая величина в знаменателе в соответствии с тем, равно ли значение ω в точности 2 или не равно. Приравняв K_2 медленно меняющимся членам в правой части (5.6.43), получим

$$K_2 = -\frac{\alpha^*}{16\omega^3} \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]}{\omega - 1} \right\}. \quad (5.6.50)$$

С погрешностью $O(\varepsilon^2)$ величина β в (5.6.50) может быть заменена на β^* . Чтобы изучить движение в рассматриваемом случае, исключим явную зависимость функции K от переменной t , совершив переход от переменных α^* и β^* к переменным α' и β' с помощью производящей функции

$$S' = \alpha' [(\omega - 2)t + \omega\beta^*]. \quad (5.6.51)$$

Таким образом,

$$\alpha^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta^*} = \omega \alpha', \quad (5.6.52)$$

$$\beta' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} = (\omega - 2)t + \omega\beta^*, \quad (5.6.53)$$

$$K' = K + (\omega - 2)\alpha' = (\omega - 2)\alpha' - \varepsilon^2 \frac{\alpha'}{16\omega^2} \left[\frac{\cos 2\beta'}{\omega - 1} + \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \right]. \quad (5.6.54)$$

Следовательно,

$$\dot{\alpha}' = -\frac{\partial K'}{\partial \beta'} = -\varepsilon^2 \frac{\alpha'}{8\omega^2(\omega-1)} \sin 2\beta', \quad (5.6.55)$$

$$\dot{\beta}' = \frac{\partial K'}{\partial \alpha'} = \omega - 2 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega^2} \left[\frac{\cos 2\beta'}{\omega-1} + \frac{\omega}{\omega^2-1} \right]. \quad (5.6.56)$$

Как и в п. 5.5.2, можно получить, что уравнения (5.6.55) и (5.6.56) допускают интеграл

$$\ln \alpha' = -\ln \left[\omega - 2 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega(\omega^2-1)} - \frac{\varepsilon^2}{16\omega^2(\omega-1)} \cos 2\beta' \right] + \text{const.} \quad (5.6.57)$$

Отсюда получаем следующие условия неустойчивости:

$$\frac{\varepsilon^2}{16\omega^2(\omega-1)} > \left| \omega - 2 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega(\omega^2-1)} \right|,$$

или иначе

$$\omega < 2 + \frac{5\varepsilon^2}{192} + O(\varepsilon^2), \quad \omega > 2 - \frac{\varepsilon^2}{192} + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.58)$$

В плоскости (ω^2, ε) переходные кривые, отделяющие область устойчивого движения от области неустойчивого движения, исходят из точки $\omega = 2$ и задаются соответственно уравнениями

$$\omega^2 = 4 + \frac{5\varepsilon^2}{48} + O(\varepsilon^3), \quad \omega^2 = 4 - \frac{\varepsilon^2}{48} + O(\varepsilon^3) \quad (5.6.59)$$

в согласии с тем, что было получено в п.3.1.2.

Случай, когда ω принимает значения, близкие к 1. В этом случае величина $\cos 2[(\omega-1)t + \omega\beta]$ меняется медленно и поэтому должна быть оставлена в выражении для K_1 ; в противном случае, как это с очевидностью следует из (5.6.42), функция S_1 будет иметь особенность в точке $\omega = 1$. Приравняв K_1 медленно меняющимся членам в (5.6.40), получим

$$K_1 = \frac{\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega-1)t + \omega\beta]. \quad (5.6.60)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{\alpha^*}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega+1)t + \omega\beta] \right\}. \quad (5.6.61)$$

Решением уравнения (5.6.61) является функция

$$S_1 = -\frac{\alpha^*}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega+1)t + \omega\beta]}{2(\omega+1)} \right\}. \quad (5.6.62)$$

Подстановка S_1 в (5.6.41) приводит к уравнению

$$K_2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{4\omega^3(\omega+1)} \cos 2[(\omega+1)t + \omega\beta] \cos^2 \omega(t+\beta) \cos 2t. \quad (5.6.63)$$

Приравняв K_2 медленно меняющимся членам в (5.6.63), получим

$$K_2 = -\frac{\alpha^*}{32\omega^3(\omega+1)}. \quad (5.6.64)$$

Поэтому во втором порядке имеем

$$K = \frac{\varepsilon\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega-1)t + \omega\beta] - \frac{\varepsilon^2\alpha^*}{32\omega^3(\omega+1)} + O(\varepsilon^3) \quad (5.6.65)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots = \\ &= \alpha^* - \frac{\varepsilon\alpha^*}{4\omega(\omega+1)} \cos 2[(\omega+1)t + \omega\beta] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.6.66)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \beta^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} + \dots = \\ &= \beta^* - \frac{\varepsilon}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega+1)t + \omega\beta]}{2(\omega+1)} \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.6.67)$$

Разрешив уравнения (5.6.66), (5.6.67) относительно α и β , получим для них следующую зависимость от α^* и β^* :

$$\alpha = \alpha^* - \frac{\varepsilon\alpha^*}{4\omega(\omega+1)} \cos 2[(\omega+1)t + \omega\beta^*] + O(\varepsilon^2), \quad (5.6.68)$$

$$\beta = \beta^* + \frac{\varepsilon}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega+1)t + \omega\beta^*]}{2(\omega+1)} \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (5.6.69)$$

Подставив выражение для β в (5.6.65), получим

$$\begin{aligned} K &= \frac{\varepsilon\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega-1)t + \omega\beta^*] - \frac{\varepsilon^2\alpha^*}{32\omega^3(\omega+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2\alpha^*}{2\omega} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} \sin 2[(\omega-1)t + \omega\beta^*] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5.6.70)$$

В присутствии последнего слагаемого в правой части уравнения (5.6.70) проявляется недостаток процедуры фон Цайпеля в ее настоящем виде, в котором для определения быстро и медленно меняющихся членов в (5.6.40) использовались смешанные переменные (новые импульсы и старые координаты). Если бы равенство (5.6.39) было выражено в новых переменных α^* и β^* , то функция S_2 поглотила бы это последнее слагаемое и сама должна была бы быть отнесена к медленно меняющейся части K_3 . Действительно, Брекуэлл обнаружил (см. Шехтер [1968]), что подобное представление в смешанных переменных при рассмотрении движения частицы в окрестности треугольной точки в ограниченной задаче трех тел приводит к неверному результату (Брекуэлл и Прингл [1966]). Учтя это обстоятельство, Шехтер для определения медленно меняющейся части (членов с большим периодом) выразил гамильтониан в новых переменных до усред-

нения и получил правильное разложение. Мьюзен [1965] развил алгоритмы, с помощью которых с точностью до любого порядка могут быть выполнены преобразования переменных величин и произвольных функций от старых переменных к новым и обратно. Лацина [1969a, b] и Стерн [1970a, 1971a] получили в общем виде выражения для почти тождественных канонических преобразований старых переменных в новые. С помощью этих преобразований они модифицировали уравнение Гамильтона—Якоби. Получающиеся в итоге схемы метода возмущений могут быть соотнесены с другими схемами, использующими канонические переменные, путем соответствующего выбора некоторых выражений, входящих в эти преобразования.

Уиттекер [1916, 1937], Черри [1927], Контопулос [1963], Макнамара и Уайтмен [1967] и Коффи [1969] разработали методику получения интегралов движения для гамильтоновых систем. В основе этой методики лежит тот факт, что любой интеграл канонических уравнений движения

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

удовлетворяет уравнению

$$[\varphi, H] = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = 0.$$

Эффективную и мощную методику выполнения преобразований переменных величин и произвольных функций к новым переменным разработали Хори [1966, 1967]—с помощью рядов Ли, Депри [1969] и Кемел [1969, 1967]—с помощью преобразований Ли. Эта методика изложена в § 5.7.

Выразив равенство (5.6.39) в новых переменных, мы бы получили

$$K = \frac{\varepsilon \alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega \beta^*] - \frac{\varepsilon^2 \alpha^*}{32\omega^3(\omega + 1)} + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.71)$$

Исключим явную зависимость K от t , совершив переход от переменных α^* и β^* к переменным α' и β' с помощью производящей функции

$$S' = \alpha' [(\omega - 1)t + \omega \beta^*]. \quad (5.6.72)$$

Следовательно, имеем

$$\alpha^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta^*} = \omega \alpha', \quad (5.6.73)$$

$$\beta' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} = (\omega - 1)t + \omega \beta^* \quad (5.6.74)$$

и, далее,

$$K' = K + \frac{\partial S'}{\partial t} = \frac{\varepsilon \alpha'}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\varepsilon^2 \alpha'}{32\omega^2 (\omega + 1)} + (\omega - 1) \alpha'. \quad (5.6.75)$$

Поэтому

$$\dot{\alpha}' = -\frac{\partial K'}{\partial \beta'} = \frac{\varepsilon \alpha'}{2\omega} \sin 2\beta', \quad (5.6.76)$$

$$\dot{\beta}' = \frac{\partial K'}{\partial \alpha'} = \frac{\varepsilon}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\varepsilon^2}{32\omega^2 (\omega + 1)} + \omega - 1. \quad (5.6.77)$$

Подобно тому как это было сделано в п.5.5.2, получаем для системы (5.6.76), (5.6.77) интеграл

$$\ln \alpha' = -\ln \left[\frac{\varepsilon}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\varepsilon^2}{32\omega^2 (\omega + 1)} + \omega - 1 \right] + \text{const.} \quad (5.6.78)$$

Следовательно, переходные кривые определяются равенством

$$\frac{\varepsilon}{4\omega} = \left| \omega - 1 - \frac{\varepsilon^2}{32\omega^2 (\omega + 1)} \right|,$$

откуда получаем

$$\omega = 1 \pm \frac{1}{4} \varepsilon - \frac{3}{64} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (5.6.79)$$

или

$$\omega^2 = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{32} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5.6.80)$$

Эти кривые согласуются с кривыми, полученными в п. 3.1.2 с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре и в п. 3.1.3—с помощью методики Уиттекера.

5.7. Усреднение с использованием рядов и преобразований Ли

При изучении колебаний слабо нелинейной системы уравнения, описывающие эти колебания, обычно преобразуются к стандартному виду

$$\dot{x} = f(x; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} f_m(x), \quad (5.7.1)$$

где

$$f_m(x) = \frac{\partial^m f}{\partial \varepsilon^m} \Big|_{\varepsilon=0}$$

при помощи метода вариации произвольных постоянных. Здесь x и f —векторы с N компонентами. Вектор x может иметь в ка-

честве своих компонент, например, амплитуды и фазы системы, или орбитальные параметры в невозмущенной задаче двух тел. Обозначим компоненты вектора \mathbf{f}_m через f_{mn} . Говорят, что компонента x_k вектора \mathbf{x} является быстро вращающейся фазой, если $f_{0k} \neq 0$.

Ранее было установлено (см. п. 5.2.3), что при изучении системы этого стандартного вида полезно рассмотреть почти тождественное преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon) = \mathbf{y} + \epsilon \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) + \dots \quad (5.7.2a)$$

переменной \mathbf{x} в переменную \mathbf{y} , такое, что система (5.7.1) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{g}_n(\mathbf{y}), \quad (5.7.2b)$$

в котором функции \mathbf{g}_n содержат только медленно меняющиеся члены. В п. 5.2.3 функции \mathbf{X}_n и \mathbf{g}_n определялись с помощью подстановки (5.7.2) в (5.7.1), выделения быстро и медленно меняющихся членов и предположения о том, что \mathbf{X}_n содержит только медленно меняющиеся члены.

5.7.1. Ряды и преобразования Ли

В этом пункте преобразование (5.7.2a) определяется как решение системы N дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} = \mathbf{W}(\mathbf{x}; \epsilon), \quad \mathbf{x}|_{\epsilon=0} = \mathbf{y}. \quad (5.7.3)$$

Вектор \mathbf{W} называется производящим вектором. На первый взгляд кажется, что мы попали в порочный круг: для упрощения исходной системы дифференциальных уравнений предлагаем решить опять-таки систему N дифференциальных уравнений. Однако это не так, ибо мы интересуемся решением системы (5.7.1) при больших t , в то время как решение системы (5.7.3) интересует нас при малых ϵ ; последнее обстоятельство существенно упрощает нашу задачу.

Уравнение (5.7.3) порождает так называемые преобразования Ли (Кемел [1970]), которые, будучи близкими к тождественному преобразованию, являются обратимыми. Если \mathbf{W} не зависит от ϵ , то уравнение (5.7.3) порождает так называемые ряды Ли. При рассмотрении канонической системы Хори [1966, 1967] и Депри [1969] полагали

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \\ t \end{bmatrix}, \quad (5.7.4a)$$

где \mathbf{q} — вектор координат системы, \mathbf{p} — вектор сопряженных импульсов, t — время, и определяли вектор \mathbf{W} равенством

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} S_p \\ -S_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = S(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \varepsilon), \quad (5.7.46)$$

где S — производящая функция.

Для преобразования гамильтониана $H = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^n/n!) H_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$

к виду $K = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^n/n!) K_n(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ Хори [1966] построил нерекуррентный алгоритм, использующий ряды Ли. Другой алгоритм для рекуррентного построения функции K с помощью преобразований Ли построил Депри [1969], Кемел [1969а] упростил этот алгоритм. Кемел [1969в], Кэмпбелл и Джеффрис [1970] и Мерсман [1970] показали, что теории Хори и Депри эквивалентны. Хори [1970] показал, что преобразования Ли эквивалентны методике фон Цайпеля вплоть до второго порядка. Шнайад [1970] доказал, что преобразование фон Цайпеля эквивалентно преобразованию Депри; Мерсман [1971] установил эквивалентность преобразований Хори, Депри и фон Цайпеля. Следует упомянуть, что теория возмущения, основанная на рядах и преобразованиях Ли, имеет несколько преимуществ по сравнению с методикой фон Цайпеля. Производящая функция не является функцией смешанного набора старых и новых переменных, теория эта канонически инвариантна, и для любой функции старых переменных можно получить прямое разложение в новых переменных.

Кемел [1970] ввел в рассмотрение преобразование (5.7.3) и построил алгоритм приведения системы стандартного вида (5.7.1) к виду (5.7.26). Кроме того, он построил алгоритмы, с помощью которых можно: 1) преобразовать любую вектор-функцию от старых переменных к новым; 2) найти преобразование (5.7.2а) и его обращение. Более глубокое изучение математической и прикладной значимости этих алгоритмов провели Анрар [1970] и Кемел [1971]. Ниже мы построим эти обобщенные алгоритмы и затем в п. 5.7.5 приспособим их к случаю канонических систем.

5.7.2. Обобщенные алгоритмы

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ — решение уравнения (5.7.3), и пусть $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ — его обращение. Тогда

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}_y d\mathbf{y}, \quad d\mathbf{y} = \mathbf{Y}_x d\mathbf{x}, \quad (5.7.5)$$

где приняты обозначения

$$\mathbf{X}_Y = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} \text{ (матрица Якоби) и } \mathbf{X}_Y dy = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} dy_j.$$

Из равенств (5.7.5) имеем

$$dx = \mathbf{X}_Y \mathbf{Y}_X dx,$$

откуда

$$\mathbf{X}_Y \mathbf{Y}_X = I \text{ (единичная матрица).}$$

Следовательно,

$$\mathbf{Y}_X = (\mathbf{X}_Y)^{-1} \text{ (обращение матрицы } \mathbf{X}_Y). \quad (5.7.6)$$

Из второго соотношения в (5.7.5) получаем равенство

$$\dot{y} = \mathbf{Y}_X \dot{x},$$

которое с учетом (5.7.1) можно переписать в виде

$$\dot{y} = g(y; \varepsilon) = \mathbf{Y}_X \mathbf{f} |_{x=X(y; \varepsilon)}. \quad (5.7.7)$$

Мы хотим получить разложение правой части (5.7.7) по степеням ε вида

$$\dot{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left. \frac{d^n g}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (5.7.8)$$

Из (5.7.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} [(\mathbf{Y}_X \mathbf{f})_{x=X(y; \varepsilon)}] = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial X} (\mathbf{Y}_X \mathbf{f}) \frac{dX}{d\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{Y}_X \mathbf{f}) \right]_{x=X(y; \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{Y}_X \mathbf{f}) = \mathbf{Y}_X \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon} \right) \mathbf{f}. \quad (5.7.10)$$

Поскольку равенство $y = Y(x; \varepsilon)$ является обращением равенства $x = X(y; \varepsilon)$ (которое задает решение уравнения $dx/d\varepsilon = W(x; \varepsilon)$ при условии $x(\varepsilon=0) = y$), то имеем

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = 0 = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \mathbf{Y}_X \frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \mathbf{Y}_X W,$$

откуда следует

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = -\mathbf{Y}_X W.$$

Тогда (5.7.10) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (Y_X f) = Y_X \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial}{\partial X} (Y_X W) f. \quad (5.7.11)$$

Используя это выражение и замечая, что $dX/d\varepsilon = W$, перепишем соотношение (5.7.9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} [(Y_X f)_{x=X(y; \varepsilon)}] = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial X} (Y_X f) W + Y_X \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial}{\partial X} (Y_X W) f \right]_{x=X(y; \varepsilon)}. \end{aligned}$$

После упрощения получим

$$\frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} [(Y_X f)_{x=X(y; \varepsilon)}] = [Y_X Df]_{x=X(y; \varepsilon)}, \quad (5.7.12)$$

где использовано обозначение

$$Df = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + f_X W - W_X f. \quad (5.7.13)$$

Повторно используя соотношение (5.7.12), можно получить

$$\frac{d^n g}{d\varepsilon^n} = [Y_X D^n f]_{x=X(y; \varepsilon)}. \quad (5.7.14)$$

Поскольку из условия $x|_{\varepsilon=0} = y$ следует

$$Y_X|_{\varepsilon=0} = I \text{ (единичная матрица),}$$

то имеем

$$\left. \frac{d^n g}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0} = D^n f \Big|_{x=y, \varepsilon=0}. \quad (5.7.15)$$

Для нахождения $D^n f$ предположим, что вектор W может быть разложен в ряд

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}, \quad (5.7.16)$$

так что преобразование (5.7.3) может быть проведено последовательно до любого порядка. Если имеет место представление

$f = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^n/n!) f_n$, то соотношение (5.7.13) принимает вид

$$Df = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!} f_n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\varepsilon^m}{m!} \left[\frac{\partial f_n}{\partial X} W_{m+1} - \frac{\partial W_{m+1}}{\partial X} f_n \right].$$

Полагая $n = k + 1$ в первом члене и $n = k - m$ во втором члене, можно переписать это выражение в виде

$$Df = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} f_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \sum_{m=0}^k C_m^k \left[\frac{\partial f_{k-m}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_{m+1} - \frac{\partial \mathbf{W}_{m+1}}{\partial \mathbf{X}} f_{k-m} \right],$$

или сокращенно

$$Df = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} f_k^{(1)}. \quad (5.7.17)$$

Здесь использованы обозначения

$$f_k^{(1)} = f_{k+1} + \sum_{m=0}^k C_m^k L_{m+1} f_{k-m}, \quad (5.7.18a)$$

$$L_m \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_m - \frac{\partial \mathbf{W}_m}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{g}, \quad (5.7.18b)$$

$$C_m^k = \frac{k!}{(k-m)! m!}.$$

Повторно используя соотношения (5.7.17) и (5.7.18) и полагая $f_k = f_k^{(0)}$, получим

$$D^n f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} f_k^{(n)}, \quad (5.7.19)$$

где

$$f_k^{(n)} = f_{k+1}^{(n-1)} + \sum_{m=0}^k C_m^k L_{m+1} f_{k-m}^{(n-1)}. \quad (5.7.20)$$

Следовательно, имеем

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}, \quad f^{(n)} = f_0^{(n)} |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}. \quad (5.7.21)$$

Рекуррентное соотношение (5.7.20) может быть наглядно представлено с помощью треугольника Ли, введенного Депри [1969]; он несколько напоминает треугольник Паскаля и показан на рис. 5.3.

Имеем, например,

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f_1 + L_1 f_0, \\ f_1^{(1)} &= f_2 + L_1 f_1 + L_2 f_0, \\ f^{(2)} &= f_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)}, \\ f_2^{(1)} &= f_3 + L_1 f_2 + 2L_2 f_1 + L_3 f_0, \\ f_1^{(2)} &= f_2^{(1)} + L_1 f_1^{(1)} + L_2 f^{(1)}, \\ f^{(3)} &= f_1^{(2)} + L_1 f^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

При выводе решений методом возмущений часто бывает необходимо выразить некоторый вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{F}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^n \mathbf{F}}{\partial \varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (5.7.23a)$$

в зависимости от новой переменной y в виде

$$\mathbf{G}(y; \varepsilon) = \mathbf{F}[\mathbf{X}(y; \varepsilon); \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(y), \quad \mathbf{F}^{(n)}(y) = \left. \frac{d^n \mathbf{F}}{d\varepsilon^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}, \varepsilon=0}, \quad (5.7.23б)$$

где приняты обозначения

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon} + \mathcal{L}\mathbf{F}, \quad \mathcal{L}\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}. \quad (5.7.23в)$$

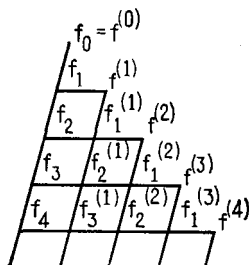


Рис. 5.3. Треугольник Ли.

Используя (5.7.16) и (5.7.23a), можем выразить это последнее равенство (аналогично выводу (5.7.17)) в виде

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathbf{F}_k^{(1)}, \quad (5.7.24)$$

где

$$\mathbf{F}_k^{(1)} = \mathbf{F}_{k+1} + \sum_{m=0}^k C_m^k \mathcal{L}_{m+1} \mathbf{F}_{k-m}, \quad (5.7.25)$$

$$\mathcal{L}_m \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_m. \quad (5.7.26)$$

Повторное применение (5.7.24) и (5.7.25) дает

$$\frac{d^n \mathbf{F}}{d\varepsilon^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathbf{F}_k^{(n)}. \quad (5.7.27)$$

Здесь приняты обозначения

$$F_k^{(n)} = F_{k+1}^{(n-1)} + \sum_{m=0}^k C_m^k \mathcal{L}_{m+1} F_{k-m}^{(n-1)}, \quad F_k^{(0)} = F_k. \quad (5.7.28)$$

Следовательно,

$$G(y; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F^{(n)}, \quad F^{(n)} = F_0^{(n)}|_{x=y}. \quad (5.7.29)$$

Уравнения (5.7.27)—(5.7.29) отличаются по виду от уравнений (5.7.19)—(5.7.21) только наличием другого оператора \mathcal{L} ; поэтому соотношение (5.7.28) также может быть наглядно представлено с помощью треугольника Ли.

5.7.3. Упрощенные общие алгоритмы

Для упрощения алгоритма, задаваемого, например, с помощью соотношения (5.7.20), Кемел [1969], [1970] записывал сначала это соотношение в виде

$$f_k^{(n)} = f_{k-1}^{(n+1)} - \sum_{m=0}^{k-1} C_m^{k-1} L_{m+1} f_{k-m-1}^{(n)}. \quad (5.7.30)$$

Затем он последовательно исключал функции из правой части, чтобы наконец выразить $f_k^{(n)}$ в виде линейного функционала от функций $f^{(n+k)}$, $f^{(n+k-1)}$, ..., $f^{(n)}$. Предположим поэтому, что

$$f_k^{(n)} = f^{(n+k)} - \sum_{j=1}^k C_j^k G_j f^{(n+k-j)}, \quad (5.7.31)$$

где линейный оператор G_j является функцией операторов L_j , L_{j-1} , ..., L_1 . Подставив (5.7.31) в (5.7.30), получим следующее рекуррентное соотношение:

$$G_j = L_j - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L_m G_{j-m}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.7.32)$$

Например, имеем

$$\begin{aligned} G_1 &= L_1, \\ G_2 &= L_2 - L_1 L_1, \\ G_3 &= L_3 - L_1 (L_2 - L_1 L_1) - 2 L_2 L_1. \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

При $n=0$ и $n=1$ из (5.7.31) имеем

$$f^{(k)} = f_k + \sum_{j=1}^k C_j^k f_{j, k-j}, \quad (5.7.34)$$

$$f_k^{(1)} = f^{(k+1)} - \sum_{j=1}^k C_j^k f_{j, k-j+1}, \quad (5.7.35)$$

где

$$\mathbf{f}_{j,i} = G_j \mathbf{f}^{(i)} = L_j \mathbf{f}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L_m \mathbf{f}_{j-m,i}. \quad (5.7.36)$$

Это и есть упрощенный алгоритм Кемела. При $\mathbf{f}^{(i)} = 0$ будем иметь $\mathbf{f}_{j,i} = 0$, поскольку в рекуррентном соотношении второй индекс i фиксирован.

Кемел получил более удобную форму этого алгоритма, записав (5.7.35) в виде

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_{k-1}^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^{k-1} \mathbf{f}_{j,k-j}. \quad (5.7.37)$$

Из (5.7.18а) имеем, что

$$\mathbf{f}_{k-1}^{(1)} = \mathbf{f}_k + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^{k-1} L_j \mathbf{f}_{k-j} + L_k \mathbf{f}_0.$$

Поэтому (5.7.37) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_k + \sum_{j=1}^{k-1} [C_j^{k-1} L_j \mathbf{f}_{k-j} + C_j^{k-1} \mathbf{f}_{j,k-j}] + L_k \mathbf{f}_0. \quad (5.7.38)$$

Вспомнив, что $d\mathbf{x}/d\varepsilon = \mathbf{W}$, будем иметь из (5.7.3):

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{y}), \quad (5.7.39)$$

где

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(\mathbf{y}) = \left. \frac{d^n \mathbf{W}}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0, \mathbf{x}=\mathbf{y}} \quad \text{для } n \geq 1.$$

Тогда из соотношений (5.7.16) и (5.7.34) следует

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{W}_k + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^{k-1} \mathbf{x}_{j,k-j}, \quad k \geq 1, \quad (5.7.40)$$

где

$$\mathbf{x}_{j,i} = \mathcal{L}_j \mathbf{x}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} \mathcal{L}_m \mathbf{x}_{j-m,i}. \quad (5.7.41)$$

Для нахождения обратного преобразования

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (5.7.42)$$

следует исключить разность $x - y$ из соотношений (5.7.39) и (5.7.42). Это дает

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y^{(n)}(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} x^{(n)}(y). \quad (5.7.43a)$$

Поскольку, однако,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} u^{(n)}(y), \quad (5.7.43b)$$

то имеем

$$u_n(x) = y^{(n)}(x), \quad u^{(n)}(y) = -x^{(n)}(y), \quad n \geq 1. \quad (5.7.43b)$$

Тогда из (5.7.34) можно получить

$$y^{(k)}(x) = -x^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} C_i^k x_{j,k-i}, \quad k \geq 1, \quad (5.7.44)$$

где $x_{j,i}$ определено соотношением (5.7.41).

5.7.4. Схема процедуры

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, записанную в стандартном виде

$$\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(x). \quad (5.7.45)$$

Суть алгоритмов, рассмотренных в предыдущем пункте, заключается в том, что с помощью перехода от переменной x к переменной y уравнение (5.7.45) приводится к виду

$$\dot{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} g_n(y), \quad (5.7.46)$$

в котором величины g_n не содержат быстропериодических членов. Для этого строится почти тождественное преобразование вида

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} x^{(n)}(y). \quad (5.7.47)$$

Это преобразование приводит некоторый вектор

$$F(x; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(x) \quad (5.7.48)$$

к виду

$$F(x; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F^{(n)}(y). \quad (5.7.49)$$

Алгоритмы, описанные в предыдущем пункте, могут быть реализованы на ЭВМ, поскольку их действие сводится к повторному применению элементарных операций. Ниже будет описана процедура для второго порядка точности. Положим для начала

$$\begin{aligned} g_0(y) &= f_0(y), \\ F^{(0)}(y) &= F_0(y). \end{aligned} \quad (5.7.50)$$

Затем, приступая к разложению первого порядка, запишем линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$g_1(y) = f_1(y) + L_1 f_0. \quad (5.7.51)$$

Положим g_1 равным медленно меняющимся членам f_1 и разрешим получающееся уравнение относительно W_1 . Тогда могут быть вычислены величины

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= W_1, \\ F_{1,0} &= \mathcal{L}_1 F^{(0)}, \\ F^{(1)} &= F_1 + F_{1,0}. \end{aligned} \quad (5.7.52)$$

Вычислив

$$g_{1,1} = L_1 g_1,$$

мы можем приступить к разложению второго порядка. Запишем дифференциальное уравнение

$$g_2 = f_2 + L_1 f_1 + g_{1,1} + L_2 f_0 \quad (5.7.53)$$

и положим g_2 равным медленно меняющимся членам правой части. Этим завершается построение разложения второго порядка.

Проиллюстрируем эту процедуру, применив ее к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{q} + q = \varepsilon (1 - q^2) \dot{q}, \quad (5.7.54)$$

решение которого при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$q = a \cos \varphi, \quad \varphi = t + \beta. \quad (5.7.55)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, уравнение (5.7.54) можно заменить системой (см. п. 5.2.3)

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon \left[a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) - a C_2 + \frac{1}{4} a^3 C_4 \right], \quad (5.7.56)$$

$$\dot{\varphi} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2} a^2 \right) S_2 - \frac{1}{4} a^2 S_4 \right], \quad (5.7.57)$$

где

$$C_n = \cos n\varphi, \quad S_n = \sin n\varphi.$$

Уравнения (5.7.56) и (5.7.57) имеют вид (5.7.1), причем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (5.7.58)$$

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.7.59)$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) - \frac{1}{2}aC_2 + \frac{1}{8}a^3C_4 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) S_2 - \frac{1}{8}a^2S_4 \end{bmatrix}, \quad (5.7.60)$$

$$\mathbf{f}_n = 0 \text{ при } n > 1. \quad (5.7.61)$$

Совершим теперь переход от переменной $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \varphi \end{bmatrix}$ к $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a^* \\ \varphi^* \end{bmatrix}$. Из соотношений (5.7.50), (5.7.59) получим

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7.62)$$

С помощью (5.7.186) и (5.7.59) находим, что

$$L_n \mathbf{f}_0 = -\frac{\partial \mathbf{W}_n}{\partial \varphi^*}. \quad (5.7.63)$$

Следовательно, (5.7.51) принимает вид

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \varphi^*}. \quad (5.7.64)$$

Считая, что быстропериодические члены в \mathbf{f}_1 отнесены к \mathbf{W}_1 , найдем

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a^* \left(1 - \frac{1}{4}a^{*2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7.65)$$

Решив полученное в результате уравнение, будем иметь

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}a^*S_2^* + \frac{1}{32}a^{*3}S_4^* \\ -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}a^{*2}\right)C_2^* + \frac{1}{32}a^{*2}C_4^* \end{bmatrix}, \quad (5.7.66)$$

где $S_n^* = \sin n\varphi^*$ и $C_n^* = \cos n\varphi^*$.

С учетом (5.7.61) и (5.7.63) уравнение (5.7.53) принимает вид

$$\mathbf{g}_2 = L_1(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1) - \frac{\partial \mathbf{W}_2}{\partial \varphi^*}. \quad (5.7.67)$$

Считая, что быстропериодические члены отнесены к \mathbf{W}_2 , получим

$$\mathbf{g}_2 = \langle L_1 \mathbf{f}_1 \rangle + \langle L_1 \mathbf{g}_1 \rangle. \quad (5.7.68)$$

Поскольку \mathbf{g}_1 состоит только из медленно меняющихся членов, а \mathbf{W}_1 — только из быстропериодических членов, имеем $\langle L_1 \mathbf{g}_1 \rangle = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{g}_2 = \langle L_1 \mathbf{f}_1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} a^{*2} - \frac{11}{128} a^{*4} \end{bmatrix}. \quad (5.7.69)$$

Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{a}^* \\ \dot{\varphi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon a^* \left(1 - \frac{1}{4} a^{*2} \right) \\ 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{2} a^{*2} + \frac{11}{32} a^{*4} \right) \end{bmatrix}. \quad (5.7.70)$$

в соответствии с разложением, полученным в п. 5.2.3 с помощью обобщенного метода усреднения.

Чтобы сравнить разложение, полученное в этом пункте, с разложением, которое получено в п. 5.4.2 с помощью методики Крылова — Боголюбова — Митропольского, необходимо соотношение (5.7.55) выразить в новых переменных. В нашем случае

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(x), \quad (5.7.71)$$

причем

$$F_0 = a \cos \varphi, \quad F_n = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (5.7.72)$$

Из (5.7.50) имеем

$$F^{(0)} = a^* \cos \varphi^*. \quad (5.7.73)$$

Тогда соотношения (5.7.52) и (5.7.26) дают

$$\begin{aligned} F_{1,0} &= \mathcal{L}_1(a^* \cos \varphi^*) = [\cos \varphi^*, -a^* \sin \varphi^*] \mathbf{W}_1 = \\ &= -\frac{1}{4} a^* \left(1 - \frac{1}{4} a^{*2} \right) \sin \varphi^* - \frac{1}{32} a^{*3} \sin 3\varphi^*. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем равенство

$$q = a^* \cos \varphi^* - \frac{1}{4} \varepsilon a^* \left[\left(1 - \frac{1}{4} a^{*2} \right) \sin \varphi^* + \frac{1}{8} a^{*2} \sin 3\varphi^* \right] + O(\varepsilon^2), \quad (5.7.74)$$

которое можно переписать в виде

$$q = a^* \cos \psi - \frac{\varepsilon a^{*3}}{32} \sin 3\psi + O(\varepsilon^2), \quad (5.7.75a)$$

где

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{a^{*2}}{8} + \frac{7a^{*4}}{256} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (5.7.756)$$

Результат согласуется с разложением, которое получено в п. 5.4.2. с помощью методики Крылова — Боголюбова — Митропольского.

5.7.5. Алгоритмы для канонических систем

Для преобразования гамильтониана

$$H(p, q, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} H_n(p, q, t) \quad (5.7.76)$$

в новый гамильтониан

$$K(P, Q, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} K_n(P, Q, t) \quad (5.7.77)$$

Хори [1966, 1967] и Депри [1969] использовали соответственно ряды и преобразования Ли.

Если положить

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \\ t \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} Q \\ P \\ t \end{bmatrix}, \quad (5.7.78)$$

$$w = \begin{bmatrix} S_p \\ -S_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} H_p \\ -H_q \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.7.79)$$

то гамильтониан K порождает вектор g согласно равенству

$$g = \begin{bmatrix} K_p \\ -K_q \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7.80)$$

В этом случае алгоритм п. 5.7.3 сводится к скалярному виду (Кемел [1969a]) согласно соотношениям

$$K_0 = H_0(Q, P, t),$$

$$K_n = H_n + \sum_{j=1}^{n-1} [C_{j-1}^n L_j H_{n-j} + C_j^{n-1} K_{j,n-j}] - \frac{\mathcal{D}S_n}{\mathcal{D}t}, \quad (5.7.81)$$

в которых приняты следующие обозначения:

$$L_j' f = \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial S_j}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial S_j}{\partial Q}, \quad (5.7.82a)$$

$$\frac{\mathcal{D}S_n}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial S_n}{\partial t} - L_n' H_0, \quad (5.7.82b)$$

$$K_{j,i} = L_j' K_i - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m-1}^{i-1} L_j' K_{j-m,i}. \quad (5.7.82b)$$

В результате преобразования, приведенного выше, старые переменные будут выражаться через новые согласно равенствам

$$\begin{aligned} q &= Q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} q^{(n)}(Q, P, t), \\ p &= P + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} p^{(n)}(Q, P, t), \end{aligned} \quad (5.7.83)$$

в которых введены обозначения

$$q^{(n)} = \frac{\partial S_n}{\partial P} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} q_{j,n-j}, \quad (5.7.84a)$$

$$p^{(n)} = -\frac{\partial S_n}{\partial Q} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} p_{j,n-j},$$

$$\begin{aligned} q_{j,i} &= L_j' q^{(i)} - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m-1}^{i-1} L_m' q_{j-m,i}, \\ p_{j,i} &= L_j' p^{(i)} - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m-1}^{i-1} L_m' p_{j-m,i}. \end{aligned} \quad (5.7.84b)$$

До третьего порядка вышеприведенные алгоритмы будут задаваться следующими соотношениями:

$$K_0 = H_0, \quad (5.7.85)$$

$$K_1 = H_1 - \frac{\mathcal{D}S_1}{\mathcal{D}t}, \quad (5.7.86)$$

$$K_2 = H_2 + L_1' H_1 + L_1' K_1 - \frac{\mathcal{D}S_2}{\mathcal{D}t}, \quad (5.7.87)$$

$$K_3 = H_3 + L_1' H_2 + 2L_2' H_1 + 2L_1' K_2 + L_2' K_1 - L_1'^2 K_1 - \frac{\mathcal{D}S_3}{\mathcal{D}t}, \quad (5.7.88)$$

$$\left. \begin{aligned} q^{(1)} &= \frac{\partial S_1}{\partial P}, \quad q^{(2)} = \frac{\partial S_2}{\partial P} + L_1' q^{(1)}, \\ q^{(3)} &= \frac{\partial S_3}{\partial P} + 2L_1' q^{(2)} + L_2' q^{(1)} - L_1'^2 q^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7.89)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}^{(1)} &= -\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = -\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{Q}} + L'_1 \mathbf{p}^{(1)}, \\ \mathbf{p}^{(3)} &= -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}} + 2L'_1 \mathbf{p}^{(2)} + L'_2 \mathbf{p}^{(1)} - L_1'^2 \mathbf{p}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.90)$$

Далее мы проиллюстрируем эту процедуру на примере качающейся пружины с гамильтонианом (5.5.57). Используя решение (5.5.67) — (5.5.70), приведем этот гамильтониан к виду

$$H = H_1 + \frac{1}{2} H_2 + \dots, \quad (5.7.91)$$

где

$$H_1 = \frac{\alpha_2}{l} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{k}} [\sin^2 B_2 - 2 \cos^2 B_2] \sin B_1, \quad (5.7.92)$$

$$H_2 = -\frac{1}{3} \frac{\alpha_2^2}{mgl} \sin^4 B_2 + \frac{12\alpha_1\alpha_2}{kl^2} \sin^2 B_1 \cos^2 B_2, \quad (5.7.93)$$

и $B_1 = \omega_1 (t + \beta_1)$.

С помощью алгоритма, описанного соотношениями (5.7.85) — (5.7.87), перейдем от переменных α, β и гамильтониана H соответственно к величинам α^*, β^* и $K = K_0 + K_1 + \frac{1}{2} K_2 + \dots$. Поскольку $H_0 = 0$, то из (5.7.85) получаем, что $K_0 = 0$, а из (5.7.82б), — что $\mathcal{D}S_n/\mathcal{D}t = \partial S_n/\partial t$. С учетом (5.7.92) соотношение (5.7.86) запишется в виде

$$K_1 = -\frac{\alpha_2^*}{l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \left\{ \sin B_1^* + \frac{3}{2} \sin (B_1^* + 2B_2^*) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sin [(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*] \right\} - \frac{\partial S_1}{\partial t}. \quad (5.7.94)$$

Все слагаемые в K_1 будут быстропериодическими, если только не выполнено условие $\omega_1 \approx 2\omega_2$. Если же оно выполнено, то величина $\sin [(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*]$ будет иметь большой период (медленно меняющийся). Полагая, что быстропериодические члены исключаются с помощью S_1 , приходим к равенствам

$$K_1 = -\frac{3\alpha_2^*}{2l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \sin [(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*], \quad (5.7.95)$$

$$S_1 = \frac{\alpha_2^*}{l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \left[\frac{\cos B_1^*}{\omega_1} + \frac{3 \cos (B_1^* + 2B_2^*)}{2(\omega_1 + 2\omega_2)} \right]. \quad (5.7.96)$$

Если считать, что в (5.7.87) быстропериодические члены исключаются с помощью S_2 , то получим

$$K_2 = \langle H_2 \rangle + \langle L'_1 H_1 \rangle + \langle L'_1 K_1 \rangle. \quad (5.7.97)$$

Усредненные величины в выражении для K_2 задаются равенствами

$$\langle L_1 K_1 \rangle = \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} \right\rangle = 0, \quad (5.7.98)$$

$$\langle H_2 \rangle = -\frac{\alpha_2^{*2}}{8mgl} + \frac{3\alpha_1^* \alpha_2^*}{kl^2} \approx -\frac{\alpha_2^{*2}}{2kl^2} + \frac{3\alpha_1^* \alpha_2^*}{kl^2}, \quad (5.7.99)$$

$$\begin{aligned} \langle L_1 H_1 \rangle &= \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} \right\rangle = \\ &= - \left[1 + \frac{9\omega_1}{4(\omega_1 + 2\omega_2)} \right] \frac{\alpha_2^{*2}}{4kl^2} - \frac{9\alpha_1^* \alpha_2^*}{4kl^2} \frac{\omega_2}{\omega_1 + 2\omega_2} \approx \\ &\approx -\frac{17\alpha_2^{*2}}{32kl^2} - \frac{9\alpha_1^* \alpha_2^*}{16kl^2}. \end{aligned} \quad (5.7.100)$$

В соотношениях (5.7.99) и (5.7.100) использовано то обстоятельство, что $\omega_1 \approx 2\omega_2$ (т. е. $kl \approx 4mg$, как это следует из определения ω_1 и ω_2). Имеем, следовательно,

$$K_2 = -\frac{33\alpha_2^{*2}}{32kl^2} + \frac{39\alpha_1^* \alpha_2^*}{16kl^2} \quad (5.7.101)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} K &= K_0 + K_1 + \frac{1}{2} K_2 + \dots = \\ &= -\frac{3\alpha_2^*}{2l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \sin [(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1 \beta_1^* - 2\omega_2 \beta_2^*] - \\ &\quad - \frac{33\alpha_2^{*2}}{64kl^2} + \frac{39\alpha_1^* \alpha_2^*}{32kl^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.7.102)$$

Чтобы исключить явную зависимость K от t , совершим переход от переменных α^* и β^* к переменным α' и β' с помощью производящей функции

$$S' = \alpha'_1 \left[\frac{(\omega_1 - 2\omega_2)t}{\omega_1} + \beta_1^* \right] + \alpha'_2 \beta_2^*. \quad (5.7.103)$$

Будем иметь

$$\alpha_1^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta_1^*} = \alpha'_1, \quad (5.7.104)$$

$$\alpha_2^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta_2^*} = \alpha'_2, \quad (5.7.105)$$

$$\beta_1^* = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_1^*} = \frac{(\omega_1 - 2\omega_2)t}{\omega_1} + \beta_1^*, \quad (5.7.106)$$

$$\beta_2^* = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_2^*} = \beta_2^* \quad (5.7.107)$$

и, далее,

$$K' = K + \frac{\partial S'}{\partial t} = -\frac{3\alpha'_2 \sqrt{\alpha'_1}}{2l \sqrt{2k}} \sin(\omega_1 \beta'_1 - 2\omega_2 \beta'_2) - \\ - \frac{33\alpha_2'^2}{64kl^2} + \frac{39\alpha'_1 \alpha'_2}{32kl^2} + \frac{\omega_1 - 2\omega_2}{\omega_1} \alpha'_1. \quad (5.7.108)$$

Вспоминая, что $\dot{\alpha}'_i = -\partial K' / \partial \beta'_i$ и $\dot{\beta}'_i = \partial K' / \partial \alpha'_i$, можем записать

$$\dot{\alpha}'_1 = \frac{3\omega_1 \alpha'_2 \sqrt{\alpha'_1}}{2l \sqrt{2k}} \cos \gamma, \quad (5.7.109)$$

$$\dot{\alpha}'_2 = -\frac{3\omega_2 \alpha'_2 \sqrt{\alpha'_1}}{l \sqrt{2k}} \cos \gamma, \quad (5.7.110)$$

$$\dot{\beta}'_1 = -\frac{3\alpha'_2}{4l \sqrt{2k\alpha'_1}} \sin \gamma + \frac{39\alpha'_2}{32kl^2} + \frac{\omega_1 - 2\omega_2}{\omega_1}, \quad (5.7.111)$$

$$\dot{\beta}'_2 = -\frac{3 \sqrt{\alpha'_1}}{2l \sqrt{2k}} \sin \gamma - \frac{33\alpha'_2}{32kl^2} + \frac{39\alpha'_1}{32kl^2}, \quad (5.7.112)$$

где принято обозначение

$$\gamma = \omega_1 \beta'_1 - 2\omega_2 \beta'_2. \quad (5.7.113)$$

5.8. Усреднение с использованием лагранжианов

Для использования канонических переменных нужно знать гамильтониан. Старрок [1958], [1962], идя по другому пути, разработал методику, в которой не используются канонические переменные. Суть ее состоит в усреднении лагранжиана и выписывании затем соответствующих уравнений Эйлера—Лагранжа. Уизэм [1965a], [1967a, 1967b, 1970] разработал подобную методику для изучения волн, в которых частота и волновое число, так же как и амплитуда, являются медленно меняющимися функциями пространственных координат и времени. Более строгое обоснование этой методики предложил Бишоп [1969]. Эта методика не столь изящна, как процедуры, использующие канонические переменные, однако она обладает тем преимуществом, что непосредственно приложима как к уравнениям в частных производных, так и к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Каваками [1970], Каваками и Ягисита [1971] для решения нелинейного уравнения Власова использовали канонические переменные в сочетании с гамильтонианами.

Эта методика нашла приложение в разнообразных задачах распространения волн в жидкости и плазме. Лайтхилл [1965], [1967] применил теорию Уизэма к волнам умеренной амплитуды в глубокой воде; Карпман и Крушкаль [1969] использовали

теорию Уизема для получения распада плоской волны на отдельные волновые пакеты, Хау [1967] изучал установившееся течение в открытом канале вдоль твердой поверхности, имеющей форму конечного набора волн. Брезертон [1968] рассмотрел линейное распространение волн в слабо меняющихся волноводах; Брезертон и Гарретт [1968] изучили медленно меняющиеся волны в неоднородных средах. Гарретт [1968], Дрейзин [1969], Рарити [1969] исследовали нелинейные внутренние гравитационные волны; Гарретт и Дрейзин определили соответственно эффекты сдвига и слабого атмосферного расслоения. Симмонс [1969] изучил взаимодействие капиллярных и гравитационных волн; Гримшоу [1970] рассмотрел уединенные волны в воде переменной глубины. Краппер [1970] исследовал возникновение капиллярных волн под влиянием гравитационных. Доерти [1970], Галлоуэй и Крофорд [1970], Галлоуэй и Ким [1971] рассматривали нелинейные волны в плазме. Дьюар [1970] исследовал взаимодействие магнитогидродинамических волн с неоднородной средой; Тан и Сивасубраманиан [1971] изучили нелинейную неустойчивость модулированных волн в магнитной плазме. Лоуэлл [1970] рассмотрел распространение волн в решетках с ангармоническим потенциалом. Дадим описание этой теории и ее применение к трем примерам.

5.8.1. Модель диспергирующих волн

В качестве первого примера рассмотрим решение в форме ряда волн для модельного уравнения Брезертона [1964]

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} + \varphi_{xx} + \varphi = \varepsilon \varphi^3. \quad (5.8.1)$$

Вместо нелинейного члена $\varepsilon \varphi^2$ здесь записан член $\varepsilon \varphi^3$. Если пренебречь нелинейным членом $\varepsilon \varphi^3$, то уравнение (5.8.1) допускает решение в форме бегущей волны

$$\varphi = a \cos \theta, \quad \theta = kx - \omega t, \quad (5.8.2)$$

в котором ω и k удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1. \quad (5.8.3)$$

Медленно меняющееся решение в форме ряда волн будем искать с помощью вариационного подхода; запишем сначала лагранжиан, соответствующий уравнению (5.8.1)

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \varphi_{xx}^2 + \frac{1}{2} \varphi_x^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \varphi^4. \quad (5.8.4)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (5.8.1) является уравнением Эйлера — Лагранжа, соответствующим этому лагранжиану. Будем

искать разложение вида

$$\varphi = a \cos \theta + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta + O(\varepsilon^2), \quad (5.8.5)$$

где

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t, \quad (5.8.6)$$

а величины a , ω , k и A_i являются медленно меняющимися функциями от x и t . В предположении, что θ дважды непрерывно дифференцируема, из (5.8.6) можно получить условие совместности

$$k_t + \omega_x = 0. \quad (5.8.7)$$

Поскольку в прямом разложении вековые члены впервые появляются среди членов порядка $O(\varepsilon)$, то будем предполагать, что величины a_x , a_t , ω_x , ω_t , k_x и k_t имеют порядок $O(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\varphi_t = a\omega \sin \theta + a_t \cos \theta + \varepsilon \omega \sum_{n=2}^{\infty} n A_n \sin n\theta + O(\varepsilon^2),$$

$$\varphi_x = -ak \sin \theta + a_x \cos \theta - \varepsilon k \sum_{n=2}^{\infty} n A_n \sin n\theta + O(\varepsilon^2),$$

$$\varphi_{xx} = -ak^2 \cos \theta - 2a_x k \sin \theta - \varepsilon k^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 A_n \cos n\theta + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя эти выражения в (5.8.4), получим лагранжиан, неявно зависящий от x и t через функции θ , a , ω , k и A_i . Члены, зависящие от θ , в выражении этого лагранжиана периодичны по θ с периодом 2π . При изменении θ на интервале $[0, 2\pi]$ остальные параметры претерпевают очень малое изменение. Поэтому с изменением x и t изменение лагранжиана L , обусловленное зависимостью от θ , происходит намного быстрее, чем изменение, обусловленное зависимостью от остальных параметров. Как и в других разновидностях метода усреднения, величину L следует усреднить по θ на интервале от 0 до 2π , предполагая a , ω , k и A_i постоянными. С этой целью усредним сначала отдельно каждый член в L . Будем иметь

$$\overline{\varphi_t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_t^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\overline{\varphi_x^2} = \frac{1}{2} a^2 k^2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\overline{\varphi_{xx}^2} = \frac{1}{2} a^2 k^4 + O(\varepsilon^2),$$

$$\overline{\varphi^4} = \frac{3}{8} a^4 + O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{4} (\omega^2 - k^4 + k^2 - 1) a^2 + \frac{3\varepsilon}{32} a^4 + O(\varepsilon^2). \quad (5.8.8)$$

Усредненный лагранжиан \mathcal{L} явно зависит от a и неявно — от θ через посредство ω и k . Запишем теперь уравнения Эйлера—Лагранжа, соответствующие переменным a и θ . Уравнение Эйлера—Лагранжа, соответствующее a , будет иметь вид $\partial \mathcal{L} / \partial a = 0$; отсюда получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2). \quad (5.8.9)$$

Отметим, что дисперсионное соотношение можно получить с помощью принципа гармонического баланса, т. е. подставив $\varphi = a \cos \theta$ в уравнение (5.8.1) и приравняв коэффициенты при $\cos \theta$ в обеих частях. В силу равенств $\omega = -\theta_t$ и $k = \theta_x$ уравнение Эйлера—Лагранжа, соответствующее переменной θ , запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \quad (5.8.10)$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0. \quad (5.8.11)$$

С учетом соотношений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \omega a^2 + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = -\frac{1}{2} (2k^3 - k) a^2 + O(\varepsilon^2)$$

будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x} [(2k^3 - k) a^2] = 0. \quad (5.8.12)$$

Чтобы упростить (5.8.12), продифференцируем обе части в (5.8.9) по k . Получим

$$\omega \omega' = 2k^3 - k + O(\varepsilon^2),$$

где $\omega' = d\omega/dk$ — групповая скорость. Следовательно, (5.8.12) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\omega \omega' a^2) = 0,$$

или

$$\omega \left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega' a^2) \right] + a^2 [\omega_t + \omega' \omega_x] = 0. \quad (5.8.13)$$

Поскольку для $\omega = \omega(k)$ имеем $\omega_t = \omega' k_t$, то второй член в (5.8.13), согласно соотношению (5.8.7), обращается в нуль. Следовательно, уравнение (5.8.13) запишется в упрощенном виде как

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega' a^2) = 0. \quad (5.8.14)$$

Кроме того, имея в виду, что $\omega = \omega(k)$, можно переписать (5.8.7) в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (5.8.15)$$

Таким образом, изменения в пространстве и во времени амплитуды a , частоты ω и волнового числа k задаются соотношениями (5.8.9), (5.8.14) и (5.8.15).

5.8.2. Модель взаимодействия волна — волна

Проведя в предыдущем пункте разложение до второго порядка, мы пришли бы к соотношению

$$\varphi = a \cos \theta + \frac{\varepsilon a^3}{32(9k^4 - 1)} \cos 3\theta + O(\varepsilon^2). \quad (5.8.16)$$

Будучи справедливым для широкой области значений k , это разложение нарушается вблизи $k^2 = 1/3$. В этом случае говорят, что имеет место резонанс в третьей гармонике; величины $\cos \theta$ и $\cos 3\theta$ удовлетворяют при этом одному и тому же дисперсионному соотношению. Последнее означает, что основная и третья гармоники имеют одинаковые фазовые скорости, равные ω/k .

Чтобы построить для уравнения (5.8.1) разложение, справедливое вблизи $k^2 = 1/3$, будем предполагать, что это разложение имеет вид

$$\varphi = a_1 \cos \theta_1 + a_3 \cos \theta_3 + \varepsilon \sum_{n \neq 1, 3}^{\infty} A_n \cos(\theta_n + \nu_n) + O(\varepsilon^2), \quad (5.8.17)$$

где

$$\theta_n = k_n x - \omega_n t + \beta_n, \quad \omega_n^2 = k_n^4 - k_n^2 + 1, \quad (5.8.18)$$

причем

$$k_3 \approx 3k_1, \quad \omega_3 \approx 3\omega_1. \quad (5.8.19)$$

Отметим, что главный член разложения содержит основной тон $\cos \theta_1$ и его третью гармонику $\cos \theta_3$. Поскольку нас интересует случай $k_1^2 \approx 1/3$, то будем считать ω_i и k_i постоянными, а величины β_i , ν_i , a_i и A_i — медленно меняющимися функциями от x и t . Подставим, далее, это разложение в (5.8.4) и усредним получающийся лагранжиан по переменным θ_i , предполагая β_i , ν_i , a_i и A_i постоянными.

Проводя усреднение, следует помнить, что, хотя переменные θ_i и являются быстрыми, величина $\theta_3 - 3\theta_1$ меняется медленно. Таким образом,

$$\begin{aligned}\overline{\varphi^4} &= \frac{3}{8} (a_1^4 + 4a_1^2 a_3^2 + a_3^4) + \frac{1}{2} a_1^3 a_3 \cos(\theta_3 - 3\theta_1) + O(\varepsilon), \\ \overline{\varphi^2} &= \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_3^2 \right) + O(\varepsilon^2), \\ \overline{\varphi_i^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (\omega_i^2 - 2\omega_i \beta_{it}) a_i^2 + O(\varepsilon^2), \\ \overline{\varphi_x^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (k_i^2 + 2k_i \beta_{ix}) a_i^2 + O(\varepsilon^2), \\ \overline{\varphi_{xx}^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (k_i^4 + 4k_i^3 \beta_{ix}) a_i^2 + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

С учетом этих выражений лагранжиан \mathcal{L} запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,3} \omega_i (\beta_{it} + \omega_i' \beta_{ix}) a_i^2 + \\ + \frac{3\varepsilon}{32} (a_1^4 + 4a_1^2 a_3^2 + a_3^4) + \frac{\varepsilon}{8} a_1^3 a_3 \cos \delta, \quad (5.8.20)\end{aligned}$$

где

$$\delta = \theta_3 - 3\theta_1 = (k_3 - 3k_1)x - (\omega_3 - 3\omega_1)t + \beta_3 - 3\beta_1. \quad (5.8.21)$$

При получении (5.8.20) мы использовали дисперсионное соотношение (5.8.18) и следующее определение групповой скорости: $\omega_i' = (2k_i^3 - k_i)/\omega_i$.

При постоянных ω_i и k_i величины a_i и β_i удовлетворяют уравнениям Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = 0, \quad (5.8.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{it}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{ix}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i}. \quad (5.8.23)$$

Подставляя \mathcal{L} из (5.8.20) в эти уравнения и используя (5.8.21), получим

$$\beta_{1t} + \omega_1' \beta_{1x} = \frac{3\varepsilon}{8\omega_1} [a_1^2 + 2a_3^2 + a_1 a_3 \cos \delta], \quad (5.8.24)$$

$$\beta_{3t} + \omega_3' \beta_{3x} = \frac{\varepsilon}{8\omega_3} [6a_1^2 + 3a_3^2 + a_1^3 a_3^{-1} \cos \delta], \quad (5.8.25)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \omega_1' \frac{\partial a_1}{\partial x} = -\frac{3\varepsilon}{8\omega_1} a_1^2 a_3 \sin \delta, \quad (5.8.26)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + \omega_3' \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{8\omega_3} a_1^3 \sin \delta. \quad (5.8.27)$$

Эти уравнения согласуются с уравнениями, полученными в пункте 6.2.9 с помощью метода многих масштабов.

5.8.3. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона

В качестве последнего примера рассмотрим вслед за Уиземом [1965а] нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0, \quad (5.8.28)$$

где $V(u)$ — произвольная нелинейная потенциальная функция, обеспечивающая уравнению колебательные решения. Скотт [1970] рассмотрел частный случай $V(u) = -\cos u$, который описывает распространение магнитного потока в контакте Джозефсона. Рассматриваемому уравнению соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - V(u). \quad (5.8.29)$$

Для решения в форме бегущей волны $u(\theta)$ уравнения (5.8.28) имеем

$$(\omega^2 - k^2) u_{\theta\theta} + V'(u) = 0, \quad (5.8.30)$$

где

$$\omega = -\theta_t, \quad k = \theta_x. \quad (5.8.31)$$

Уравнение (5.8.30) имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 + V(u) = E. \quad (5.8.32)$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\theta = \sqrt{\frac{\omega^2 - k^2}{2}} \int \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}}. \quad (5.8.33)$$

Предположим, что период периодической функции u нормировкой может быть сведен к единице, так что

$$\sqrt{\frac{\omega^2 - k^2}{2}} \oint \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}} = 1. \quad (5.8.34)$$

Для определения приближенных уравнений, которым удовлетворяют медленно меняющиеся величины E , ω и k , подставим в (5.8.29) вместо u функцию $u(\theta)$ и усредним получающийся лагранжиан по интервалу $[0, 1]$. С учетом (5.8.32) будем иметь

$$L = \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 - V(u) = (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 - E. \quad (5.8.35)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^1 L[u(\theta)] d\theta = (\omega^2 - k^2) \int_0^1 u_\theta^2 d\theta - E \int_0^1 d\theta = \\ &= (\omega^2 - k^2) \oint u_\theta du - E = \\ &= \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \oint \sqrt{E - V(u)} du - E. \end{aligned} \quad (5.8.36)$$

Изменение \mathcal{L} , связанное с изменением E , определяется дисперсионным соотношением (5.8.34). С учетом равенств $\omega = -\theta_t$ и $k = \theta_x$ уравнение Эйлера—Лагранжа, соответствующее переменной θ , запишется в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0. \quad (5.8.37)$$

Подставив в (5.8.37) выражение для \mathcal{L} , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega W) + \frac{\partial}{\partial x} (kW) = 0, \quad (5.8.38)$$

где

$$W = \sqrt{\frac{2}{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{E - V(u)} du. \quad (5.8.39)$$

Постановка задачи окажется завершенной, если к соотношениям (5.8.34) и (5.8.38) присоединить условие совместности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (5.8.40)$$

Упражнения

5.1. Используя методику Стюарта—Ватсона—Экхауса, определить приближенные решения задач

(а) $\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon u^3, \quad u(0) = u(\pi) = 0;$

(б) $u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u^3,$

$u(x, 0) = a \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0.$

5.2. Используя методику Страбля, определить равномерные разложения второго порядка для уравнений (Страбл [1962])

(а) $\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u},$

(б) $\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0.$

5.3. Используя методику Крылова—Боголюбова, определить приближенные решения уравнений

(а) $\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\varepsilon u |\dot{u}|;$

(б) $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u} + \varepsilon u^3;$

(в) $\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0.$

5.4. Рассмотрим уравнение Матъё

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0.$$

Определить равномерные разложения второго порядка, используя (а) методику Крылова—Боголюбова—Митропольского; (б) обобщенный метод усреднения; (в) преобразования Ли.

5.5. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon q^3 + K \cos \omega t.$$

(а) Показать, что оно соответствует гамильтониану

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{1}{4} \varepsilon q^4 - K_q \cos \omega t;$$

(б) Определить разложение первого порядка, полагая, что $K = O(1)$ и значения ω далеки от $3\omega_0$, ω_0 , $\omega_0/3$;(в) $K = O(1)$ и ω близко к $3\omega_0$;(г) $K = O(1)$ и ω близко к $\omega_0/3$;(д) $K = O(\varepsilon)$ и ω близко к ω_0 .

5.6. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon (1 - q^2) \dot{q} + K \cos \omega t.$$

Используя метод Крылова—Боголюбова, определить разложения первого порядка для случаев, перечисленных в упр. 5.5.

5.7. Используя обобщенный метод усреднения, метод Крылова—Боголюбова—Митропольского и метод Кемела, определить разложения второго порядка для решения уравнения

$$\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u} + \varepsilon u^3.$$

Сравнить результаты, полученные тремя методами. Какую из этих методик вы бы рекомендовали для подобных задач?

5.8. Рассмотрим задачу

$$\ddot{u} + 2\mu \dot{u} + \nu^2 u = -\varepsilon f(u, \dot{u}).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$u = a_0 e^{-\mu t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}.$$

(а) Для $\varepsilon \neq 0$ определить равномерное разложение, положив, следуя Мендельсону [1970], $u = u(a, \psi)$ и

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \\ \frac{da}{dt} &= -\mu a + \varepsilon A_1(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \dots \end{aligned}$$

(б) Определить разложение, используя методику Крылова—Боголюбова—Митропольского.

(в) Какое из этих разложений является более точным?

5.9. Рассмотрим задачу

$$\ddot{u} + \delta u + \varepsilon b_1 u^m + \varepsilon b_2 u^{n-1} - \varepsilon b_3 u^{n-1} \cos \lambda t = 0,$$

где δ , ε , b_i и λ — постоянные, n — четное, m — нечетное натуральные числа, причем $m > n$.

(а) Для малого ε найти решение вида

$$u = a(t) \cos \theta, \quad \theta = \omega t - \varphi(t), \quad \omega = \lambda/n,$$

и с помощью метода усреднения определить уравнения для a и φ (Цо и Кон [1965]).

(б) Определить гамильтониан, соответствующий вышеприведенному уравнению, затем с помощью канонических переменных определить разложение первого порядка для случая, когда δ близко к ω^2 .

(в) Сравнить результаты, полученные двумя методиками.

5.10. Задача о сферическом маятнике (т. е. о частице, движущейся под действием силы тяжести по поверхности гладкой неподвижной сферы) формулируется с помощью гамильтониана (Йохансен и Кейн [1969])

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - mg \sqrt{l^2 - q_1^2 - q_2^2} - \frac{(p_1 q_1 + p_2 q_2)^2}{2ml^2}.$$

Здесь q_i и p_i — координаты и компоненты импульса частицы, m — ее масса, g — ускорение свободного падения и l — радиус сферы.

(а) Определить для малых амплитуд решение первого порядка, используя метод осреднения в канонических переменных.

(б) Определить разложение второго порядка, используя преобразования Ли.

(в) Сравнить полученные три разложения.

5.11. Рассмотрим задачу о качающейся пружине с демпфированием:

$$\ddot{x} + \delta_1 \dot{x} + \frac{k}{m} x + g(1 - \cos \theta) - (l + x) \dot{\theta}^2 = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \delta_2 \dot{\theta} + \frac{g}{l+x} \sin \theta + \frac{2}{l+x} \dot{x} \dot{\theta} = 0.$$

Положим $\omega_1^2 = k/m$ и $\omega_2^2 = g/l$. Используя обобщенный метод усреднения и преобразования Ли, определить равномерные разложения второго порядка для случаев (а) $\omega_1 \approx 2\omega_2$; (б) $\omega_1 \approx 3\omega_2$.

5.12. Рассмотрим уравнения (3.1.63) — (3.1.65).

(а) Показать, что им соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - \\ - \frac{1}{2} (h_1 q_2^2 + h_2 q_1^2) (1 + e \cos f)^{-1}.$$

(б) Используя метод усреднения в канонических переменных, определить разложение первого порядка в окрестности переходных кривых, исходящих из точки (μ_0, e) , где $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2}/3)/2$.

(в) С помощью преобразований Ли определить в окрестности этих переходных кривых разложение второго порядка.

5.13. Рассмотрим движение частиц, описываемое гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_2 p_1 - q_1 p_2) + \frac{9}{8} q_1^2 + \left(\delta + \frac{1}{8} \right) q_2^2 + q_1^3 + 2q_1 q_2^2,$$

где δ — постоянный параметр. (а) Показать, что при $\delta = 1$ круговые частоты в линеаризованной задаче равны 1 и 2; (б) используя метод усреднения в ка-

ненических переменных, определить для малых амплитуд разложение первого порядка при $\delta \approx 1$; (в) с помощью метода усреднения определить разложение первого порядка; (г) какую из этих методик вы рекомендовали бы для подобных задач?

5.14. Рассмотрим задачу (Сетна [1965])

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \varepsilon (3b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2) - \varepsilon \delta_1 \dot{x} + K_1 \cos \lambda t,$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y = \varepsilon (b_2 x^2 + 2b_3 xy + 3b_4 y^2) - \varepsilon \delta_2 \dot{y} + K_2 \sin \lambda t.$$

Говорят, что имеет место внутренний резонанс, если $\omega_1 \approx 2\omega_2$ или $\omega_2 \approx 2\omega_1$; при $\lambda \approx \omega_1$ или ω_2 говорят о резонансном возбуждении; случай $K_i = \varepsilon k_i$, где $k_i = O(1)$, соответствует мягкому возбуждению и, наконец, случай $K_i = O(1)$ — жесткому возбуждению. Используя метод усреднения, определить разложения первого порядка для следующих случаев:

- (а) жесткое нерезонансное возбуждение при отсутствии внутреннего резонанса;
- (б) жесткое нерезонансное возбуждение при внутреннем резонансе;
- (в) мягкое резонансное возбуждение при отсутствии внутреннего резонанса;
- (г) мягкое резонансное возбуждение при внутреннем резонансе.

5.15. Бегущие волны в холодной плазме описываются уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + E = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \omega_p^2 (1 - \rho).$$

Пусть $\rho = 1 + O(\varepsilon)$, $u = O(\varepsilon)$ и $E = O(\varepsilon)$. Используя метод усреднения, определить временное и пространственное изменение амплитуды и фазы монохроматической бегущей волны.

5.16. Рассмотрим задачу

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0.$$

- (а) Показать, что функция

$$\varphi = a \cos \theta, \quad \theta = kx - \omega t$$

является решением этого уравнения при условии, что $\omega^2 = k^2 + 1$.

- (б) Показать, что вышеприведенное уравнение может быть записано в виде законов сохранения (Уизем [1965])

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} (-\varphi_x \varphi_t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\varphi_x \varphi_t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \varphi_x^2 - \varphi^2 \right] = 0.$$

- (в) Положим в уравнениях закона сохранения $\varphi = a \cos \theta$, причем $a = a(x, t)$, $k = \theta_x$ и $\omega = -\theta_t$. Предположим, что a , ω и k — слабо меняющиеся функции от x и t . Осреднить эти уравнения по θ на интервале от 0 до 2π , предполагая a ,

ω и k постоянными, и получить соотношения

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega' a^2) = 0.$$

5.17. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u = \varepsilon u^3.$$

(а) Выписать лагранжиан, соответствующий этому уравнению.

(б) Определить разложение первого порядка для бегущих волн с постоянным волновым числом, но амплитудой и фазой, меняющимися во времени и пространстве.

5.18. Задача о нелинейных поперечных колебаниях однородной балки со свободными концами и с нелинейной связью между моментом и кривизной описывается лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^4 \right],$$

где ρ , β и ε — постоянные. Определить разложение первого порядка для бегущих волн со слабо меняющимися амплитудами и фазами: (а) используя вариационный подход; (б) выписывая уравнения движения и применяя метод усреднения.

5.19. Рассмотрим модельное уравнение Брезертона [1964]

$$\Phi_{tt} + \Phi_{xxxx} + \Phi_{xx} + \Phi + \Phi^2.$$

(а) Показать, что в линейной задаче дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1.$$

(б) Определить волновое число, соответствующее резонансу в n -й гармонике.

(в) Используя метод усреднения, определить разложение первого порядка в окрестности резонанса во второй гармонике (амплитуды и фазы считать функциями от x и t).

(г) Выписать соответствующий лагранжиан, затем, применяя вариационный подход, определить разложение первого порядка в окрестности резонанса во второй гармонике.

Метод многих масштабов

6.1. Описание метода

Существуют три разновидности метода многих масштабов. Мы дадим их описание на примере линейного демпфируемого осциллятора

$$\ddot{x} + x = -2\epsilon \dot{x}. \quad (6.1.1)$$

Этот пример мы выбрали потому, что можно, во-первых, сравнить полученное приближенное решение с точным и, во-вторых, ясней продемонстрировать различные варианты метода, не прибегая к алгебраическим выкладкам.

Получим сначала прямое асимптотическое разложение для малого ϵ . Пусть

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (6.1.2)$$

Подстановкой (6.1.2) в (6.1.1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ϵ получаем

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (6.1.3)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0, \quad (6.1.4)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\dot{x}_1. \quad (6.1.5)$$

Общее решение уравнения (6.1.3) имеет вид

$$x_0 = a \cos(t + \varphi), \quad (6.1.6)$$

где a и φ — произвольные постоянные. Подставив x_0 в (6.1.4) и решив полученное уравнение, получим

$$x_1 = -at \cos(t + \varphi). \quad (6.1.7)$$

Подставив, далее, x_1 в (6.1.5) и решив это уравнение относительно x_2 , получим

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2}at \sin(t + \varphi). \quad (6.1.8)$$

Следовательно,

$$x = a \cos(t + \varphi) - \epsilon at \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2}\epsilon^2 a [t^2 \cos(t + \varphi) + t \sin(t + \varphi)] + O(\epsilon^3). \quad (6.1.9)$$

Очевидно, что (6.1.9) дает плохое приближение для x , если t имеет порядок ε^{-1} . В этом случае второй (εx_1) и третий ($\varepsilon^2 x_2$) члены уже не малы по сравнению соответственно с x_0 и εx_1 (x_1 и x_2 содержат вековые члены), как это предполагалось при выводе полученного разложения. Таким образом, прямое разложение перестает быть справедливым, когда t достигает величины $O(\varepsilon^{-1})$. Как это обсуждалось в п. 2.1, трудность здесь заключается в том, что область определения бесконечна.

В несостоятельности прямого разложения можно убедиться, рассмотрев точное решение уравнения (6.1.1), которое имеет вид

$$x = ae^{-\varepsilon t} \cos [\sqrt{1-\varepsilon^2} t + \varphi]. \quad (6.1.10)$$

Равенство (6.1.9) может быть получено разложением решения (6.1.10) при малом ε и фиксированном t . Экспонента и косинус представляются в виде

$$\exp(-\varepsilon t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 + \dots, \quad (6.1.11)$$

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2} t + \varphi) = \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t \sin(t + \varphi) + \dots \quad (6.1.12)$$

Ясно, что $\exp(-\varepsilon t)$ можно аппроксимировать конечным числом членов только при условии, что εt мало. В силу малости ε это означает, что $t = O(1)$. Если же t имеет порядок ε^{-1} , то εt уже не мало, и приближение с помощью усеченного ряда оказывается неудовлетворительным. Приведенный выше усеченный ряд дает хорошее приближение только до некоторого значения t , после которого $\exp(-\varepsilon t)$ отличается от усеченного ряда на величину, превышающую заданный предел точности. Добавлением новых членов к усеченному ряду значение t можно увеличить до некоторого нового значения t' , в пределах которого новый усеченный ряд будет давать удовлетворительное приближение. Однако при $t > t'$ разность между $\exp(-\varepsilon t)$ и новым усеченным рядом вновь превосходит заданную точность. Для того чтобы разложение $\exp(-\varepsilon t)$ оказалось удовлетворительным для всех значений t , следует учесть в нем все члены. Таким образом, при построении разложения, справедливого для времен порядка ε^{-1} , произведение εt следует рассматривать как одну переменную величину $T_1 = O(1)$. Тогда любое усеченное разложение $\exp(-\varepsilon t)$, справедливое для времен порядка ε^{-1} , имеет вид

$$\exp(-\varepsilon t) = \exp(-T_1). \quad (6.1.13)$$

Аналогично, усеченное разложение (6.1.12) является неудовлетворительным при t порядка $O(\varepsilon^{-2})$. Для получения усеченного асимптотического разложения $\cos[\sqrt{1-\varepsilon^2} t + \varphi]$, справедливого при $t = O(\varepsilon^{-2})$, комбинацию $\varepsilon^2 t$ следует трактовать как

одну переменную величину $T_2 = O(1)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \cos[\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \varphi] &= \cos\left[t - \frac{1}{2}T_2 + \varphi - \frac{1}{8}\varepsilon^4t + \dots\right] = \\ &= \cos\left[t - \frac{1}{2}T_2 + \varphi\right] + \frac{1}{8}\varepsilon^4t \sin\left[t - \frac{1}{2}T_2 + \varphi\right] + \dots \quad (6.1.14) \end{aligned}$$

Разложение (6.1.14) справедливо и при $t = O(\varepsilon^{-2})$, так как поправочный (второй) член имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ или меньший вплоть до времен порядка $O(\varepsilon^{-2})$. Однако при $t = O(\varepsilon^{-4})$ это разложение нарушается, ибо второй член уже не мал по сравнению с первым. Чтобы получить разложение, справедливое для времен порядка $O(\varepsilon^{-4})$, следует ввести еще одну переменную $T_4 = \varepsilon^4t = O(1)$.

В проведенных выше рассуждениях предполагалось, что $x(t; \varepsilon)$ явно зависит от $t, \varepsilon t, \varepsilon^2t, \dots$ и от ε . Это можно усмотреть и из точного решения. Таким образом, для получения усеченного разложения, справедливого для времен порядка $O(\varepsilon^{-M})$, где M — целое положительное число, мы должны считать x зависящим от $M+1$ разных масштабов времени T_0, T_1, \dots, T_M , где

$$T_m = \varepsilon^m t. \quad (6.1.15)$$

Масштаб времени T_1 соответствует более медленному времени, чем масштаб T_0 , а T_2 соответствует более медленному времени, чем масштаб T_1 . В общем случае время T_n медленнее T_{n-1} . Итак, предположим, что

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_M; \varepsilon) = \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\varepsilon T_M). \quad (6.1.16) \end{aligned}$$

Остаточный член в (6.1.16) записан в виде $O(\varepsilon T_M)$, чтобы напомнить читателю, что рассматриваемое разложение справедливо вплоть до времен порядка $O(\varepsilon^{-M})$. Желая сохранить равномерное приближение вне этого интервала времени, мы должны использовать другие масштабы времени. Из (6.1.15) и (6.1.16) можно видеть, что исходная задача с обыкновенным дифференциальным уравнением перешла в задачу с уравнением в частных производных. Если же в исходной задаче рассматривалось уравнение в частных производных, то введение разных масштабов времени увеличит число независимых переменных. Применив правило дифференцирования сложной функции, получим, что дифференцирование по времени изменится в соответствии с равенством

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (6.1.17)$$

Равенства (6.1.15) вместе с (6.1.17) определяют одну из разновидностей метода многих масштабов, а именно метод многих переменных. Эта методика развита в работах Старрока [1957], [1963], Фримена [1963], Найфэ [1965 в, г], [1968] и Сандри [1965], [1967]. Из (6.1.16) и (6.1.17) видно, что при получении разложения с равномерным приближением вместе с зависимой переменной по степеням малого параметра разлагается и оператор дифференцирования. Поэтому Старрок и Найфэ называли этот метод методом разложения производной.

Подставляя (6.1.16) и (6.1.17) в (6.1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения, из которых определяются x_0, x_1, \dots, x_M . Решения этих уравнений будут содержать произвольные функции от масштабов времени T_1, T_2, \dots, T_M . Для определения этих функций необходимо потребовать выполнения некоторых дополнительных условий. Поскольку равенство (6.1.16) должно выполняться для времен порядка ε^{-M} , то величина $\varepsilon^m x_m$ должна быть малой поправкой к $\varepsilon^{m-1} x_{m-1}$. Последняя в свою очередь должна быть малой поправкой к $\varepsilon^{m-2} x_{m-2}$. Итак, мы требуем, чтобы

$$\frac{x_m}{x_{m-1}} < \infty \text{ для всех } T_0, T_1, \dots, T_M.$$

Это условие не означает, что каждое x_m ограничено. На самом деле каждое x_m может быть неограниченным. Однако, как и в методике Лайтхилла (§ 3.2), это условие требует, чтобы особенность высших приближений не превосходила особенности первого члена. Это условие эквивалентно исключению вековых членов.

Вторая разновидность метода многих масштабов была введена Коулом и Кеворкяном [1963] и применена Кеворкяном [1966a] и Коулом [1968] при решении некоторых примеров. Моррисон [1966a] показал, что эта процедура с точностью до второго порядка эквивалентна методу усреднения; Перко [1969] установил их эквивалентность до n -го порядка. Кеворкян [1966b] показал эквивалентность этой процедуры в первом порядке методу фон Цайпеля. Рассмотрев точное решение (6.1.10), мы заметим, что время t фигурирует в нем в одной из двух комбинаций: εt или $\sqrt{1-\varepsilon^2} t$. Следовательно, для получения разложения, справедливого для больших времен, необходимо ввести два масштаба времени

$$\xi = \varepsilon t, \quad \eta = \sqrt{1-\varepsilon^2} t = \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \dots\right) t. \quad (6.1.18)$$

Поэтому Коул и Кеворкян [1963] предположили, что

$$x(t; \varepsilon) = \tilde{x}(\xi, \eta; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m x_m(\xi; \eta) + O(\varepsilon^M), \quad (6.1.19)$$

где

$$\xi = \varepsilon t, \quad \eta = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots + \varepsilon^M \omega_M) t, \quad (6.1.20)$$

а ω_n — постоянные величины. В данном случае ξ медленнее, чем η , а производная по времени преобразуется в соответствии с равенством

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots + \varepsilon^M \omega_M \right) \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (6.1.21)$$

Обе эти разновидности можно значительно обобщить. Так, метод многих переменных можно обобщить (Найфэ [1967в]), применив вместо степеней ε асимптотическую последовательность $\delta_n(\varepsilon)$, т. е., положив

$$T_n = \delta_n(\varepsilon) t, \quad (6.1.22)$$

$$\frac{d}{dt} = \sum_{n=0}^M \delta_n(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (6.1.23)$$

Уравнения (6.1.22) и (6.1.23) можно далее обобщить, положив

$$T_n = \delta_n(\varepsilon) g_n[\mu_n(\varepsilon) t], \quad (6.1.24)$$

$$\frac{d}{dt} = \sum_{n=0}^M \delta_n(\varepsilon) \mu_n(\varepsilon) g'_n[\mu_n(\varepsilon) t] \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad (6.1.25)$$

где $\mu_n(\varepsilon)$ — другая асимптотическая последовательность. Таким образом, (6.1.24) позволяет рассмотреть линейные и нелинейные масштабы времени.

Аналогичным образом может быть обобщена процедура разложения по двум переменным. Так, обобщив (6.1.20) и (6.1.21), можно записать

$$\xi = \mu(\varepsilon) t, \quad \eta = \sum_{n=0}^M \delta_n(\varepsilon) g_n[\mu(\varepsilon) t], \quad (6.1.26)$$

$$\frac{d}{dt} = \mu(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\sum_{n=0}^M \delta_n(\varepsilon) \mu(\varepsilon) g'_n[\mu(\varepsilon) t] \right) \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (6.1.27)$$

В таком общем виде эта техника была развита несколькими исследователями, в том числе Кузмаком [1959], Кокраном [1962], Махони [1962] и Найфэ [1964], [1965в]. Клима, Рамнат и Сандри [1970] исследовали роль преобразований масштабов в получении равномерных асимптотических разложений.

Метод многих масштабов столь популярен, что его заново открывают почти каждые полгода. Он применялся к широкому кругу задач физики, техники и прикладной математики.

Коул и Кеворкян [1963], Найфэ [1965с], [1967в], [1968], Кеворкян [1966а], Дэвис и Олфренд [1967], Швертассек [1969], и

Мьюза [1970], Расмуссен [1970] и Рейсс [1971] изучали слабо линейные и нелинейные колебания, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями второго или третьего порядка. Кузмак [1959] изучал нелинейные колебания, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка со слабо меняющимися коэффициентами. Кокран [1962], Найфэ [1964], [1965b] и Фаукес [1968] использовали обобщенную форму метода для изучения задач с точкой ветвления в линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Кокран [1962], Найфэ [1964], [1965b] и Рамнат и Сандри [1969] использовали обобщенный метод для изучения линейных уравнений с переменными коэффициентами, в то время как Чен и Ву [1970] исследовали действительность масштабов в задаче о старении пружины. Ноердлингер и Петросян [1971] рассматривали линейное неоднородное уравнение со слабо меняющимися коэффициентами, которое описывает влияние космологического расширения на систему самогравитирующих частиц. Кеворкян [1971] исследовал задачу прохождения через резонанс для одномерного осциллятора со слабо меняющейся частотой. Кокран [1962], О'Малли [1968a], [1968b] и Сёрл [1971] применили обобщенный метод к краевым задачам для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, в то время как Кокран [1962] и Акерберг и О'Малли [1970] применили этот метод к уравнениям второго порядка с точками ветвления или пограничным слоем. Там [1968] использовал обобщенную разновидность для решения уравнения Оппа — Зоммерфельда.

В механике космического полета Найфэ [1965a] применил обобщенную разновидность метода при анализе задачи о полете аппарата Земля — Луна. Тин и Брофман [1964] и Найфэ [1966] проанализировали задачу старта спутника с малой тягой с круговой орбиты, Ши и Экштейн [1966] исследовали старт с эллиптической орбиты с малой тягой, Кеворкян [1966a] и Брофман [1967] изучили движение спутника с малыми тягой или сопротивлением и Экштейн и Ши [1967] рассмотрели движение спутника с переменной массой и малой тягой. Экштейн, Ши и Кеворкян [1966a] определили движение спутника вокруг основного тела в ограниченной задаче трех тел, в то время как Олфренд и Рэнд [1969] определили устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел. Экштейн, Ши и Кеворкян [1966c] оценили члены высших порядков в движении спутника, используя интеграл энергии, а также влияние эксцентриситета и наклона [1966b]. Ши и Экштейн [1968] рассмотрели движение искусственного спутника, период обращения которого соизмерим с периодом вращения основного тела. В окрестности коллинеарных точек либрации Олфренд [1970] и Найфэ [1971b] изучили резонансы при отношении частот два

к одному, а Найфэ и Кемел [1970b] и Олфренд [1971b] — при отношении частот три к одному. Для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы Олфренд [1971a] исследовал резонансы при отношении частот два к одному.

Для задач механики полета Эшли [1967] обсуждал роль различных масштабов времени; Найфэ и Сарик [1971b] изучали нелинейные резонансы при движении снаряда со слабой асимметрией. С помощью обобщенной разновидности метода Найфэ [1969a] изучал движение вращающегося снаряда с переменными скоростью вращения и динамическим давлением, но с линейными аэродинамическими характеристиками, в то время как Найфэ и Сарик [1972a] изучали движение с нелинейными динамическими характеристиками и переменными скоростью вращения и динамическим давлением. Рамнат [1970b] изучал динамику переходных процессов для летательного аппарата.

В механике твердого тела Амазиго, Будянски и Кэрриер [1970] рассматривали нелинейное выпучивание неидеальной колонны; Рейсс и Матковский [1971] исследовали нелинейное динамическое выпучивание сжатой упругой колонны. Мортелл [1968] рассматривал задачу о бегущей волне в цилиндрической оболочке и распространение волн по сферической оболочке [1969]. Келли [1965] и Морино [1969] изучали нелинейный флаттер панели, Сприггс, Месситер и Андерсон [1969] рассматривали флаттер мембраны.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных Кокран [1962], Найфэ [1965b] и Камсток [1971] изучали эллиптические уравнения. Фаукес ([1968], часть II) получил равномерно пригодные разложения для задач о каустике. Нойберт [1970] получил решения уравнения Гельмгольца для турбулентной воды. Уингейт и Дэвис [1970] рассматривали распространение волн в неоднородном стержне. Келлер и Когельман [1970] для уравнения в частных производных исследовали задачу с нелинейными начальными условиями.

Люк [1966] изучал уравнение Клейна—Гордона и общие вариационные уравнения второго порядка; Эмери [1970] исследовал случай нескольких зависимых переменных и несколько быстро вращающихся фаз. Абловитц и Бенни [1970] для уравнения Клейна—Гордона исследовали эволюцию многофазных колебаний. Найфэ и Хассан [1971] и Найфэ и Сарик [1972b] исследовали нелинейные диспергирующие волны на поверхности раздела двух жидкостей и в горячей электронной плазме. Паркер [1969] рассматривал влияние релаксации и диффузионного демпфирования на диспергирующие волны.

В теории взаимодействия волн Бенни и Саффмэн [1966], Бенни [1967], Дейвидсон [1967], Бенни и Ньюэлл [1967], Хоулт [1968], Ньюэлл [1968] и Бенни и Ньюэлл [1969] исследовали

нелинейное взаимодействие случайных волн в среде с дисперсией. Дейвидсон [1969] изучал эволюцию во времени волновых корреляций в равномерно турбулентной совокупности слабо нелинейных систем с дисперсией.

В теории волн на воде Кэрриер [1966] рассматривал гравитационные волны в воде переменной глубины, Хугстратен [1968], Фримен и Джонсон [1970] изучали волны в мелкой воде в течениях со сдвигом. Джейкобс [1967] решал уравнения приливов. Меррей [1968] рассматривал поверхностные колебания в баке, возникающие при истечении жидкости. Чу и Мей [1970] изучали медленно меняющиеся волны Стокса. Мак Голдрик [1970] и Найфэ [1970b] рассматривали случай резонанса во второй гармонике при взаимодействии капиллярных и гравитационных волн, в то время как Найфэ [1970d], [1971a] исследовал случай резонанса в третьей гармонике.

В теории атмосферы Ньюэлл [1969] рассматривал резонансное взаимодействие пакетов волн Россби, Стоун [1969] — задачу о бароклинных волнах. Шаббар [1971] исследовал механизм резонанса, поддерживающего волны Россби; Линдзен [1971] изучал распространение экваториальных волн Танаи и Кельвина.

В физике плазмы Болл [1964], Тауссиг [1969] и Там [1969], [1970] рассматривали распространение нелинейных волн в холодной плазме; Найфэ [1965c] и Дас [1971] исследовали нелинейные колебания в горячей электронной плазме. Дейвидсон [1968] рассматривал нелинейные колебания в плазме Власова — Максвелла. Пейре [1966] изучал волны в плазме, возникающие в ускорителе; Батлер и Гриббен [1968] рассматривали нелинейные волны в неоднородной плазме. Мароли и Поццоли [1969] изучали проникновение высокочастотных электромагнитных волн в слабо ионизированную плазму. Абрахам-Шраунер [1970a] [1970b] исследовал подавление ухода электронов в газе Лорентца. Чень и Левак [1970], Чень [1971] и Прасад [1971] изучали параметрическое возбуждение в плазме, в то время как Левак [1971] рассматривал взаимодействие электростатических волн в плазме. Добровольный и Роджистер [1971] и Роджистер [1971] рассматривали распространение гидромагнитных волн в плазме с большой концентрацией электронов.

В теории гидродинамической устойчивости и устойчивости плазмы Фримен и Резерфорд [1964] развили кинетическую теорию для слабо неустойчивой плазмы; Олбрайт [1970] рассматривал стабилизацию поперечной неустойчивости плазмы. Келли [1967] исследовал устойчивость невязкого слоя со сдвигом. Бенни и Роскес [1969] рассматривали неустойчивость гравитационных волн. Кيان [1969] и Найфэ [1969b] изучали неустойчивость Рэлея — Тейлора; Ньюэлл и Уайтхед [1969] рассматривали послекритическую конвекцию Рэлея — Бонара. Найфэ [1970c] исследо-

вал нелинейную устойчивость жидкой струи. Найфэ и Сарик [1971a] изучали нелинейную неустойчивость Кельвина — Гельмгольца; Пюри [1971] исследовал влияние вязкости и наличия мембраны на колебания двух жидкостей, имеющих общую границу. Стюартсон и Стюарт [1971] рассматривали нелинейную устойчивость плоского течения Пуазейля. Митчелл [1971] применил эту методику для исследования неустойчивости горения.

В механике жидкости Жермен [1967] и Лик [1970] дали обзор исследований, выполненных в последнее время по аэродинамике и нелинейному распространению волн в жидкостях с помощью методов сращивания асимптотических разложений, координатных преобразований и многих масштабов. Бенни [1965] исследовал картину течения, которая возникает, когда на стационарное вращение диска накладываются колебания с конечной амплитудой; Барсillon [1970] рассматривал линейную вязкую теорию установившихся течений вращающейся жидкости. Рабберт и Ландау [1967] изучали задачу о трансзвуковом обтекании крыла. Пейре [1970] рассматривал задачу об установившемся течении в канале проводящей сжимаемой жидкости. Чон и Сирович [1971] изучали задачу газовой динамики для установившегося сверхзвукового течения с диссипацией. Чень, Кирш и Ли [1971] рассматривали поведение сильной ударной волны, вызванной точечным взрывом и непрерывно продвигаемой наружу внутренней поверхностью контакта.

В общей физике Кой и Пейн [1967] использовали сочетание метода многих масштабов и метода сращивания асимптотических разложений для решения уравнения Фоккера — Планка, которое описывает реакцию самовозбуждающихся осцилляторов на случайные возбуждения. Браун [1967] разработал стохастическую теорию диссоциации и рекомбинации двухатомных молекул. Рамнат [1970a] получил приближение к модели Томаса — Ферми в атомной физике и рассмотрел класс нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в астрофизике [1971]. Мейер [1971] исследовал рэлеевское рассеяние лазерного луча на тяжелом релятивистском атоме с двумя уровнями энергии; Нинхус [1970] изучал броуновское движение с вращательной степенью свободы.

В статистической механике Маоли [1966] решал уравнение Больцмана, чтобы построить кинетическую теорию высокочастотного резонансного пробоя в газе; Калдиrola, де Барбьери и Мароли [1966] решали уравнение Больцмана для функции распределения электронов. Де Барбьери и Маоли [1967] решали уравнение Лиувилля для исследования динамики слабо ионизированных газов; Голдберг и Сандри [1967] и Раманатан и Сандри [1969] вывели системы иерархических уравнений.

В оставшейся части этого параграфа мы опишем три разновидности метода многих масштабов и рассмотрим их применение

к простому линейному демпфируемому осциллятору, который описывается уравнением (6.1.1). В следующих параграфах мы применим эти методики к различным задачам математической физики.

6.1.1. Метод многих переменных (процедура разложения производной)

Подставив (6.1.16) и (6.1.17) в (6.1.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим следующие уравнения для x_0 , x_1 и x_2 :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0, \quad (6.1.28)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1}, \quad (6.1.29)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_1}. \quad (6.1.30)$$

Общее решение уравнения (6.1.28) имеет вид

$$x_0 = A_0(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_0(T_1, T_2) e^{-iT_0}, \quad (6.1.31)$$

где A_0 и \bar{A}_0 — комплексно сопряженные величины. Мы получили, попросту говоря, решение (6.1.6), в котором величины a и ϕ не постоянны, а являются функциями масштабов медленного времени T_1 и T_2 . Подставляя x_0 из (6.1.31) в (6.1.29), получим

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2i \left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + 2i \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}. \quad (6.1.32a)$$

Общее решение уравнения (6.1.32a) имеет вид

$$x_1 = A_1(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{-iT_0} - \left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{iT_0} - \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{-iT_0}. \quad (6.1.32b)$$

Сравнение соотношений (6.1.32b) и (6.1.31) показывает, что величина ϵx_1 является малой поправкой к x_0 только при условии, что $\epsilon T_0 = \epsilon t$ мало. Чтобы получить разложение, пригодное для больших времен порядка $O(\epsilon^{-1})$, следует потребовать обращения в нуль вековых членов $T_0 \exp(\pm iT_0)$ в (6.1.32b). Таким образом,

$$A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} = 0, \quad (6.1.33)$$

откуда

$$A_0 = a_0(T_2) e^{-T_1}. \quad (6.1.34)$$

Тогда равенство (6.1.32б) примет вид

$$x_1 = A_1(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (6.1.35)$$

Используя в (6.1.30) выражения для x_0 и x_1 , получим

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -Q(T_1, T_2) e^{iT_0} - \bar{Q}(T_1, T_2) e^{-iT_0}, \quad (6.1.36)$$

где принято обозначение

$$Q(T_1, T_2) = 2iA_1 + 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - a_0 e^{-T_1} + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} e^{-T_1}. \quad (6.1.37)$$

Слагаемые в правой части уравнения (6.1.36) порождают вековые члены, поскольку оно имеет частное решение вида

$$x_2 = \frac{1}{2} i Q(T_1, T_2) T_0 e^{iT_0} - \frac{1}{2} i \bar{Q}(T_1, T_2) T_0 e^{-iT_0}. \quad (6.1.38)$$

Из-за наличия вековых членов величина $\varepsilon^2 x_2$ сравнивается по порядку с εx_1 при больших t порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Чтобы исключить эти вековые члены, нужно потребовать обращения в нуль величины Q , т. е.

$$\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 = \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) e^{-T_1}. \quad (6.1.39)$$

Чтобы прийти к уравнению (6.1.39), вовсе не обязательно, вообще говоря, находить решение для x_2 . Достаточно только, изучив уравнение (6.1.36), исключить те слагаемые, которые порождают вековые члены. Общее решение уравнения (6.1.39) имеет вид

$$A_1 = \left[a_1(T_2) + \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1}. \quad (6.1.40)$$

Подставляя это значение A_1 в (6.1.35), получим

$$x_1 = \left[a_1(T_2) + \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1} e^{iT_0} + CC, \quad (6.1.41)$$

где символом CC обозначено выражение, комплексно сопряженное к предыдущему выражению. Имеем, однако,

$$x_0 = [a_0 e^{iT_0} + \bar{a}_0 e^{-iT_0}] e^{-T_1}. \quad (6.1.42)$$

Поэтому, хотя при $T_1 \rightarrow \infty$ и выполнено $x_0 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow 0$, но величина εx_1 при увеличении t до значений порядка $O(\varepsilon^{-2})$ приобретает порядок $O(x_0)$. Таким образом, разложение $x_0 + \varepsilon x_1$ нарушается для значений t порядка $O(\varepsilon^{-2})$, если только не обратился в нуль коэффициент при T_1 в круглых скобках в (6.1.41), т. е.

если только не выполнено

$$-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} = 0, \quad (6.1.43)$$

или

$$a_0 = a_{00} e^{-iT_2/2}, \quad (6.1.44)$$

где a_{00} — постоянная. Тогда равенство (6.1.40) принимает вид

$$A_1 = a_1(T_2) e^{-T_1}. \quad (6.1.45)$$

Следовательно,

$$x = e^{-T_1} \{a_{00} e^{i(T_0 - T_2/2)} + \bar{a}_{00} e^{-i(T_0 - T_2/2)} + \\ + \varepsilon [a_1(T_2) e^{iT_0} + \bar{a}_1(T_2) e^{-iT_0}]\} + O(\varepsilon^2). \quad (6.1.46)$$

Доведя разложение до третьего порядка, можно получить функцию $a_1(T_2)$ вида

$$a_1(T_2) = a_{11} e^{-iT_2/2}, \quad (6.1.47)$$

где a_{11} — постоянная. Предположив, что начальные условия задаются равенствами $x(0) = a \cos \varphi$ и $\dot{x}(0) = -a(\sin \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \varepsilon \cos \varphi)$, и заменив T_n на $\varepsilon^n t$, получим

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \varphi \right) + R, \quad (6.1.48)$$

где R — остаточный член. Из (6.1.10) и (6.1.48) находим, что

$$R = a e^{-\varepsilon t} \left[\cos \left(t \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \varphi \right) - \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \varphi \right) \right] = \\ = -2a e^{-\varepsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) t + \varphi \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) t \right] = \\ = -2a e^{-\varepsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) t + \varphi \right] \times \\ \times \sin \left[\left(-\frac{1}{16} \varepsilon^4 + \dots \right) t \right] = O(\varepsilon^4 t). \quad (6.1.49)$$

Для линейных уравнений вида (6.1.1) можно вводить разные масштабы времени, не прибегая к разложению x . Так, используя (6.1.17), получим для уравнения (6.1.1)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \dots \right] x + x = \\ = -2\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right) x. \quad (6.1.50)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , приходим к соотношениям

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_0^2} + x = 0, \quad (6.1.51)$$

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_1} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_0}, \quad (6.1.52)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_2} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_1}. \quad (6.1.53)$$

Общее решение уравнения (6.1.51) имеет вид

$$x = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (6.1.54)$$

Подставляя его в (6.1.52), получим

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + A \right) e^{iT_0} + \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} + \bar{A} \right) e^{-iT_0} = 0. \quad (6.1.55)$$

Поскольку уравнение (6.1.55) справедливо при любом T_0 , коэффициенты при $\exp(iT_0)$ и $\exp(-iT_0)$ должны обратиться в нуль, т. е. должно быть выполнено

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + A = 0, \quad (6.1.56)$$

откуда имеем

$$A = a(T_2) e^{-T_1}. \quad (6.1.57)$$

Подстановка (6.1.54) в (6.1.53) дает

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + CC = 0. \quad (6.1.58)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} = 0. \quad (6.1.59)$$

Подставляя A вида (6.1.57) в (6.1.59), получим

$$2i \frac{\partial a}{\partial T_2} - a = 0. \quad (6.1.60)$$

Следовательно, имеем

$$a = a_0 e^{-iT_2/2}, \quad (6.1.61)$$

где a_0 — постоянная.

Поэтому решение (6.1.54) принимает вид

$$x = a_0 e^{-T_1} e^{i(T_0 - T_2/2)} + CC. \quad (6.1.62)$$

Выразив (6.1.62) через t , получим

$$x = ae^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \varphi \right), \quad (6.1.63)$$

где $a_0 = (1/2) a \exp(i\varphi)$. Этот результат находится в полном согласии с (6.1.48).

6.1.2. Процедура разложения по двум переменным

Заменяв независимую переменную t на переменные ξ и η согласно (6.1.21), приведем уравнение (6.1.1) к виду

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + 2\varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + x = \\ = -2\varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial x}{\partial \eta} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (6.1.64)$$

Будем искать разложение вида

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (6.1.65)$$

Подставляя (6.1.65) в (6.1.64) и приравнивая коэффициенты при равных степенях ε в обеих частях, получим

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0, \quad (6.1.66)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} = -2 \frac{\partial x_0}{\partial \eta}, \quad (6.1.67)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 + 2\omega_2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} = -2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi}. \quad (6.1.68)$$

Общее решение уравнения (6.1.66) имеет вид

$$x_0 = A_0(\xi) e^{i\eta} + \bar{A}_0(\xi) e^{-i\eta}. \quad (6.1.69)$$

С учетом этого решения уравнение (6.1.67) примет вид

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = -2i \left(\frac{dA_0}{d\xi} + A_0 \right) e^{i\eta} + CC. \quad (6.1.70)$$

Желая исключить в (6.1.70) те слагаемые, которые порождают вековые члены, придем к уравнению

$$\frac{dA_0}{d\xi} + A_0 = 0. \quad (6.1.71)$$

Следовательно,

$$x_1 = A_1(\xi) e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi) e^{-i\eta}. \quad (6.1.72)$$

Решение уравнения (6.1.71) имеет вид

$$A_0 = a_0 e^{-\xi}, \quad (6.1.73)$$

где a_0 — постоянная.

Подстановка полученных выше решений для x_0 и x_1 в (6.1.68) даст

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = \left[-2i \left(\frac{dA_1}{d\xi} + A_1 \right) + (2\omega_2 + 1) a_0 e^{-\xi} \right] e^{i\eta} + CC. \quad (6.1.74)$$

Исключая в (6.1.74) те слагаемые, которые порождают вековые члены, приходим к уравнению

$$\frac{dA_1}{d\xi} + A_1 = -\frac{1}{2} i (2\omega_2 + 1) a_0 e^{-\xi}, \quad (6.1.75)$$

которое имеет своим решением функцию

$$A_1 = a_1 e^{-\xi} - \frac{1}{2} i (2\omega_2 + 1) a_0 \xi e^{-\xi}. \quad (6.1.76)$$

Подставив A_1 в (6.1.72) и сравнив результат с (6.1.69), увидим, что отношение x_1/x_0 при $\xi \rightarrow \infty$ не ограничено, если только не выполнено условие

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}. \quad (6.1.77)$$

При выполнении этого условия равенство (6.1.65) запишется в виде следующей функции от t :

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.78)$$

где принято $a_0 + \varepsilon a_1 = (1/2) a \exp(i\varphi)$. Это выражение полностью согласуется с выражением, полученным с помощью метода многих переменных (метода разложения производной).

6.1.3. Обобщенный метод — нелинейные масштабы

Преобразуем сначала уравнение (6.1.1) с помощью новой переменной $\tau = \varepsilon t$ к виду

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} \right) + x = 0. \quad (6.1.79)$$

Чтобы получить равномерно пригодное разложение, положим

$$\xi = \tau, \quad \eta = \frac{g_{-1}(\tau)}{\varepsilon} + g_0(\tau) + \varepsilon g_1(\tau) + \dots, \quad g_i(0) = 0, \quad (6.1.80)$$

где величины g_i будут определены в процессе вычислений. Производные по τ преобразуются тогда в соответствии с равенствами

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon} + g'_0(\xi) + \varepsilon g'_1(\xi) + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (6.1.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} = & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon} + g'_0(\xi) + \varepsilon g'_1(\xi) + \dots \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \\ & + \left[\frac{g''_{-1}(\xi)}{\varepsilon} + g''_0(\xi) + \varepsilon g''_1(\xi) + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \eta} + \\ & + \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon} + g'_0(\xi) + \varepsilon g'_1(\xi) + \dots \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (6.1.82)$$

Предположим, что x представляется равномерно пригодным разложением вида

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (6.1.83)$$

Подставляя (6.1.81) — (6.1.83) в (6.1.79) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$g'^2_{-1} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0, \quad (6.1.84)$$

$$g'^2_{-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 + 2g'_{-1} g'_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + g'_{-1} \frac{\partial x_0}{\partial \eta} + 2g'_{-1} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} + 2g'_{-1} \frac{\partial x_0}{\partial \eta} = 0. \quad (6.1.85)$$

Общее решение уравнения (6.1.84) имеет вид

$$x_0 = A_0(\xi) \exp\left(i \frac{\eta}{g'_{-1}}\right) + \bar{A}_0(\xi) \exp\left(-i \frac{\eta}{g'_{-1}}\right). \quad (6.1.86)$$

Подстановка этого выражения для x_0 в (6.1.85) дает

$$\begin{aligned} g'^2_{-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = & - \left[\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} + i \frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i \right) A_0 + \right. \\ & \left. + 2ig'_{-1} \left(\frac{A_0}{g'_{-1}} \right)' + 2 \frac{g''_{-1}}{g'^2_{-1}} A_0 \eta \right] \exp\left(i \frac{\eta}{g'_{-1}}\right) + CC. \end{aligned} \quad (6.1.87)$$

Слагаемые в правой части (6.1.87), вообще говоря, порождают вековые члены. Чтобы избежать вековых членов, следует положить

$$\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} + i \frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i \right) A_0 + 2ig'_{-1} \left(\frac{A_0}{g'_{-1}} \right)' + 2 \frac{g''_{-1}}{g'^2_{-1}} \eta A_0 = 0. \quad (6.1.88)$$

Уравнение (6.1.88) должно выполняться для любого η , а величина $A_0 \neq 0$ для нетривиального решения; потребуем поэтому

$$g'_{-1} = 0 \text{ или } g_{-1} = c\xi, \text{ поскольку } \eta(0) = 0. \quad (6.1.89)$$

Здесь c — произвольная постоянная, которую, не теряя общности, можно положить равной единице. Тогда уравнение (6.1.88) примет

вид

$$A'_0 + (1 + ig'_0) A_0 = 0 \quad (6.1.90)$$

и будет иметь своим решением функцию

$$A_0 = a_0 e^{-\xi - ig_0(\xi)}, \quad (6.1.91)$$

где a_0 — постоянная. Поскольку A_0 и g_{-1} найдены, имеем

$$x_0 = a_0 e^{-\tau} e^{i(\tau/\varepsilon)} + \bar{a}_0 e^{-\tau} e^{-i(\tau/\varepsilon)}. \quad (6.1.92)$$

Из равенства (6.1.92) видно, что величина g_0 сократилась, и, следовательно, решение не зависит от значения g_0 . Поэтому без потери общности можно положить ее равной нулю. Тогда A_0 принимает вид

$$A_0 = a_0 e^{-\xi}. \quad (6.1.93)$$

С учетом (6.1.88) получим следующее решение для x_1 :

$$x_1 = A_1(\xi) e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi) e^{-i\eta}. \quad (6.1.94)$$

Зная функции $g_{-1} = \xi$ и $g_0 = 0$, можно получить уравнение для x_2 . Подставим с этой целью соотношения (6.1.81) — (6.1.83) в (6.1.79) и приравняем нулю коэффициент при ε^2 . Получим

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + 2g'_1 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi} = 0. \quad (6.1.95)$$

Подстановка выражений для x_0 и x_1 в (6.1.95) дает

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = -[2i(A'_1 + A_1) - (2g'_1 + 1)a_0 e^{-\xi}] e^{i\eta} + CC. \quad (6.1.96)$$

Исключая в (6.1.96) слагаемые, которые порождают вековые члены, получим

$$A'_1 + A_1 = -\frac{1}{2} i (2g'_1 + 1) a_0 e^{-\xi}. \quad (6.1.97)$$

Решение уравнения (6.1.97) имеет вид

$$A_1 = a_1 e^{-\xi} - \frac{1}{2} i a_0 (2g_1 + \xi) e^{-\xi}, \quad (6.1.98)$$

где a_1 — постоянная. Из равенства (6.1.98) видно, что отношение x_1/x_0 при $\xi \rightarrow \infty$ не ограничено, если только не выполнено

$$g_1 = -\frac{1}{2} \xi. \quad (6.1.99)$$

При использовании переменной $t = \tau/\varepsilon$ разложение примет вид

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos\left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \varphi\right) + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.100)$$

где принято $a_0 + \epsilon a_1 = (1/2) a \exp(i\varphi)$. Это разложение опять-таки согласуется с разложениями, полученными с помощью разновидностей метода многих масштабов — метода разложения производной и метода разложения двух переменных.

6.2. Приложения метода разложения производной

6.2.1. Уравнение Дюффинга

Вторым примером, к которому мы применим метод разложения производной, является уравнение Дюффинга

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \epsilon u^3 = 0. \quad (6.2.1)$$

Предположим, что имеет место разложение вида

$$u = \sum_{n=0}^2 \epsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2) + O(\epsilon^3), \quad (6.2.2)$$

тогда

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (6.2.3)$$

Подставив (6.2.2) и (6.2.3) в (6.2.1) и приравняв нулю коэффициенты при каждой степени ϵ , получим

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (6.2.4)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3, \quad (6.2.5)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - 3u_0^2 u_1. \quad (6.2.6)$$

Решение уравнения (6.2.4) имеет вид

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6.2.7)$$

С его учетом уравнение (6.2.5) примет вид

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -[2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.8)$$

Для того чтобы отношение u_1/u_0 было ограниченным при любом T_0 , следует исключить слагаемые, порождающие вековые члены. Положив

$$2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0, \quad (6.2.9)$$

получим для u_1 следующее решение:

$$u_1 = B(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.10)$$

Обращаясь к решению уравнения (6.2.9), положим $A = (1/2)ae^{i\varphi}$, где a и φ — действительные величины, и выделим в нем действительную и мнимую части. Получим

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + \frac{3}{8}a^2 = 0. \quad (6.2.11)$$

Следовательно, имеем

$$a = a(T_2), \quad \varphi = \frac{3}{8\omega_0}a^2T_1 + \varphi_0(T_2). \quad (6.2.12)$$

Подставив u_0 и u_1 в (6.2.6), получим

$$D_0^2u_2 + \omega_0^2u_2 = -\frac{3}{8\omega_0^2}A^5e^{5i\omega_0T_0} + \left[\frac{21}{8\omega_0^2}A^4\bar{A} - 3BA^2\right]e^{3i\omega_0T_0} - \\ - Q(T_1, T_2)e^{i\omega_0T_0} + CC, \quad (6.2.13)$$

где принято обозначение

$$Q = 2i\omega_0D_1B + 3A^2\bar{B} + 6A\bar{A}B + 2i\omega_0D_2A - \frac{15A^3\bar{A}^2}{8\omega_0^2}. \quad (6.2.14)$$

Вековые члены будут исключены при выполнении условий

$$B = 0, \quad (6.2.15)$$

$$2i\omega_0D_2A = \frac{15A^3\bar{A}^2}{8\omega_0^2}, \quad (6.2.16)$$

т. е. при $Q = 0$. Для u_2 получим решение вида

$$u_2 = \frac{A^5}{64\omega_0^4}e^{5i\omega_0T_0} - \frac{21A^4\bar{A}}{64\omega_0^4}e^{3i\omega_0T_0} + CC, \quad (6.2.17)$$

в котором не учтено решение однородного уравнения. Полагая в (6.2.16) $A = (1/2)ae^{i\varphi}$ и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_2} = \frac{15}{256\omega_0^2}a^4. \quad (6.2.18)$$

Из равенств (6.2.12) и (6.2.18) следует, что a — постоянная. Следовательно, имеем

$$\varphi_0 = -\frac{15}{256\omega_0^3}a^4T_2 + \chi, \quad (6.2.19a)$$

где χ — постоянная. Поэтому

$$\varphi = \frac{3}{8\omega_0}a^2T_1 - \frac{15}{256\omega_0^3}a^4T_2 + \chi. \quad (6.2.19b)$$

Подставляя выражения для u_0 , u_1 и u_2 в (6.2.2), вспоминая равенство $A = (1/2) a \exp(i\varphi)$ и выражая результат через переменную t , получим

$$u = a \cos(\omega t + \chi) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \varepsilon \frac{21a^2}{32\omega_0^2}\right) \cos 3(\omega t + \chi) + \\ + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t + \chi) + O(\varepsilon^2), \quad (6.2.20a)$$

где принято обозначение

$$\omega = \omega_0 + \frac{3a^2}{8\omega_0} \varepsilon - \frac{15a^4}{256\omega_0^3} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2). \quad (6.2.20б)$$

В последних двух членах в (6.2.20a) величина ω_0 заменена на ω с ошибкой порядка $O(\varepsilon^3)$.

6.2.2. Осциллятор Ван-дер-Поля

В качестве второго примера рассмотрим осциллятор Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt}. \quad (6.2.21)$$

Подставив (6.2.2) и (6.2.3) в (6.2.21) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (6.2.22)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0, \quad (6.2.23)$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - D_1^2 u_0 - 2D_0 D_2 u_0 + \\ + (1 - u_0^2) D_0 u_1 + (1 - u_0^2) D_1 u_0 - 2u_0 u_1 D_0 u_0. \quad (6.2.24)$$

Решение уравнения (6.2.22) имеет вид

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (6.2.25)$$

Подстановка u_0 в (6.2.23) дает

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -i(2D_1 A - A + A^2 \bar{A}) e^{iT_0} - iA^3 e^{3iT_0} + CC. \quad (6.2.26)$$

Чтобы исключить слагаемые, которые порождают вековые члены, потребуем обращения в нуль коэффициентов при $\exp(\pm iT_0)$:

$$2D_1 A = A - A^2 \bar{A}. \quad (6.2.27)$$

Тогда решением уравнения (6.2.26) будет функция

$$u_1 = B(T_1, T_2) e^{iT_0} + \frac{1}{8} i A^3 e^{3iT_0} + CC. \quad (6.2.28)$$

Чтобы решить уравнение (6.2.27), положим

$$A = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) \exp i\varphi(T_1, T_2). \quad (6.2.29)$$

Выделяя в (6.2.27) действительную и мнимую части, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a. \quad (6.2.30)$$

Следовательно, имеем

$$\varphi = \varphi(T_2), \quad a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2)e^{-T_1}}. \quad (6.2.31)$$

Если нас интересует первое приближение к u , то мы должны считать B , φ и c постоянными. Если, кроме того, положить $u(0) = a_0$ и $du(0)/dt = 0$, то имеем

$$u = a \cos t + O(\varepsilon), \quad (6.2.32)$$

где принято обозначение

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}. \quad (6.2.33)$$

Найденный результат согласуется с разложением, полученным в п. 5.4.2 с помощью методики Крылова — Боголюбова — Митропольского.

Для нахождения второго приближения нужно определить функции B , φ и c . Подставим с этой целью выражения для u_0 и u_1 в (6.2.24) и получим уравнение

$$D_0^2 u_2 + u_2 = Q(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{Q}(T_1, T_2) e^{-iT_0} + NST, \quad (6.2.34a)$$

в котором принято обозначение

$$Q = -2iD_1 B + i(1 - 2A\bar{A})B - iA^2\bar{B} - 2iD_2 A - D_1^2 A + \\ + (1 - 2A\bar{A})D_1 A - A^2 D_1 \bar{A} + \frac{1}{8} A^3 \bar{A}^2, \quad (6.2.34b)$$

а через NST обозначены слагаемые, не порождающие вековых членов. Вековые члены будут исключены при условии $Q = 0$. Чтобы решить уравнение (6.2.34b) при $Q = 0$, положим $B = (1/2)ib \exp i\varphi$, где b — действительное число, а φ определено в (6.2.29). Подставив A и B в (6.2.34b) при $Q = 0$ и выделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad \text{или } a = a(T_1), \quad (6.2.35a)$$

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) b = -2a \frac{d\varphi}{dT_2} + \frac{d^2 a}{dT_1^2} - \left(1 - \frac{3}{4} a^2 \right) \frac{da}{dT_1} - \frac{1}{128} a^5. \quad (6.2.35b)$$

С помощью соотношений (6.2.30) уравнение (6.2.35б) можно переписать в виде

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \frac{2}{a} \frac{da}{dT_1} b = -2a \left(\frac{d\varphi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{7}{16} a^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{da}{dT_1}. \quad (6.2.36a)$$

Имеем, таким образом,

$$d \left(\frac{b}{a} \right) = - \left(\frac{d\varphi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) dT_1 + \left(\frac{7}{32} a - \frac{1}{8a} \right) da. \quad (6.2.36б)$$

Интегрируя, получаем

$$b = -a \left(\frac{d\varphi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) T_1 + \frac{7}{64} a^3 - \frac{1}{8} a \ln a + ab_0(T_2). \quad (6.2.36в)$$

Чтобы отношение u_1/u_0 было ограниченным при всех T_1 , коэффициент при T_1 в приведенном выше выражении для b должен обратиться в нуль. Из этого условия имеем

$$\varphi = -\frac{1}{16} T_2 + \varphi_0, \quad (6.2.37)$$

где φ_0 — постоянная. Тогда разложение u во втором приближении запишется в виде

$$\begin{aligned} u = & a \cos \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] - \\ & - \varepsilon \left\{ \left(\frac{7}{64} a^3 - \frac{1}{8} a \ln a + ab_0 \right) \sin \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{32} a^3 \sin 3 \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] \right\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

где a определено соотношением (6.2.33), а b_0 — постоянная с точностью того же порядка, что и указанная ошибка. С ошибкой порядка $O(\varepsilon^2)$ это выражение можно переписать в виде

$$u = a \cos(t - \theta) - \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \sin 3(t - \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (6.2.39a)$$

где принято

$$\theta = \frac{1}{16} \varepsilon^2 t + \frac{1}{8} \varepsilon \ln a - \frac{7}{64} \varepsilon a^2 + \theta_0, \quad (6.2.39б)$$

а $\theta_0 = -\varphi_0 - \varepsilon b_0$ — постоянная. Последняя форма решения полностью согласуется с решением, полученным в п. 5.4.2 с помощью метода Крылова — Боголюбова — Митропольского.

6.2.3. Вынужденные колебания осциллятора Ван-дер-Поля

Рассмотрим отклик на внешнюю периодическую силу осциллятора Ван-дер-Поля, изученного в предыдущем пункте, т. е. рассмотрим колебания, описываемые уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} + K \cos \lambda t, \quad (6.2.40)$$

где K и λ — действительные постоянные. Следует различать четыре случая в зависимости от того, является ли возбуждение (внешняя сила) „мягким“ (т. е. $K = O(\varepsilon)$) или „жестким“ (т. е. $K = O(1)$) и является ли возбуждение резонансным [т. е. $\lambda - \omega_0 = O(\varepsilon)$] или нерезонансным (т. е. $\lambda - \omega_0 = O(1)$).

Мягкое нерезонансное возбуждение. В этом случае имеем $K = \varepsilon k$, где $k = O(1)$, и $\cos \lambda t$ можно выразить в виде $\cos \lambda T_0$. Для нахождения первого приближения к u положим

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2), \quad (6.2.41)$$

причем $T_0 = t$ и $T_1 = \varepsilon t$. Подставив (6.2.41) в (6.2.40) и приравняв коэффициенты при ε^0 и ε в обеих частях, получим

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (6.2.42)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 + k \cos \lambda T_0. \quad (6.2.43)$$

Решение уравнения (6.2.42) имеет вид

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6.2.44)$$

Подстановка u_0 в (6.2.43) дает

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = i\omega_0 (-2A' + A - A^2 \bar{A}) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} k e^{i\lambda T_0} - i\omega_0 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.45)$$

Чтобы не было вековых членов, потребуем выполнения условия

$$2A' = A - A^2 \bar{A}. \quad (6.2.46)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по T_1 . Тогда решением уравнения (6.2.45) будет функция

$$u_1 = B(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0^2 - \lambda^2} e^{i\lambda T_0} + \frac{iA^3}{8\omega_0} e^{3i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.47)$$

Положив в (6.2.46) $A = (1/2) a \exp i\phi$, выделив действительную и мнимую части и решив полученные уравнения, можно установить, что ϕ — постоянная, в то время как a определяется равенством (6.2.33).

Имеем поэтому в первом приближении

$$u = a \cos \omega_0 t + O(\epsilon), \quad (6.2.48)$$

где a определено в (6.2.33).

Из равенств (6.2.33) и (6.2.48) видно, что наличие мягкого нерезонансного возбуждения не влияет в первом приближении ни на фазу, ни на амплитуду. Более того, поскольку вынуждающая функция мягкая, то собственные колебания системы (соответствующие случаю $k=0$) преобладают над вынужденными колебаниями, как и следовало ожидать. Однако при приближении вынуждающей частоты λ к собственной частоте ω_0 вынужденные колебания становятся более значительными и стремятся к бесконечности, как это можно видеть из (6.2.47). Приведенное выше разложение при этом становится непригодным.

Жесткое нерезонансное возбуждение. В этом случае $K = O(1)$, а уравнения (6.2.42) и (6.2.43) преобразуются к виду

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = K \cos \lambda T_0, \quad (6.2.49)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0. \quad (6.2.50)$$

Решение уравнения (6.2.49) имеет вид

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda T_0. \quad (6.2.51)$$

Подстановка u_0 в (6.2.50) дает

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = i\omega_0 [-2A' + A\eta - A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} + CC + NST, \quad (6.2.52)$$

где $\eta = 1 - K^2/2(\omega_0^2 - \lambda^2)^2$. Чтобы исключить вековые члены, потребуем выполнения условия

$$2A' = A\eta - A^2 \bar{A}. \quad (6.2.53)$$

Чтобы решить уравнение (6.2.53), положим в нем $A = (1/2) a \exp i\varphi$, выделим действительную и мнимую части. Получим, что φ — постоянная, и, кроме того, должно быть выполнено уравнение

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2} a \left(\eta - \frac{1}{4} a^2 \right). \quad (6.2.54)$$

Разделением переменных можно найти следующее решение уравнения (6.2.54):

$$\ln a^2 - \ln \left(\eta - \frac{1}{4} a^2 \right) = \eta T_1 + \text{const.}$$

Если положить $u(0) = a_0 + [K/(\omega_0^2 \lambda^2)]$ и $du(0)/dt = 0$, то первое приближение к u будет задаваться равенством

$$u = a \cos \omega_0 t + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\epsilon), \quad (6.2.55)$$

где принято обозначение

$$a^2 = \frac{4\eta}{1 + \left(\frac{4\eta}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon\eta t}}. \quad (6.2.56)$$

Стационарное решение (т. е. решение, получающееся при $t \rightarrow \infty$) зависит от знака η (т. е. от того, больше ли K^2 , чем $2(\omega_0^2 - \lambda^2)^2$, или меньше). Для отрицательного η имеем $\exp(-\varepsilon\eta t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$; следовательно, при $t \rightarrow \infty$ имеем $a \rightarrow 0$ и стационарное решение имеет вид

$$u_s = \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\varepsilon). \quad (6.2.57)$$

Однако для положительного η при $t \rightarrow \infty$ имеем $\exp(-\varepsilon\eta t) \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 2\sqrt{\eta}$. Стационарное решение соответственно имеет вид

$$u_s = 2\sqrt{\eta} \cos \omega_0 t + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\varepsilon). \quad (6.2.58)$$

Поэтому при отрицательном η собственные колебания системы затухают и стационарное решение состоит только из вынужденных колебаний. Однако при положительном η стационарное решение образовано сочетанием собственных и вынужденных колебаний, причем наличие жесткого возбуждения изменяет амплитуду собственных колебаний.

Мягкое резонансное возбуждение. В этом случае имеем $K = \varepsilon k$, $k = O(1)$ и $\lambda = \omega_0 + \sigma\varepsilon$, причем расстройка $\sigma = O(1)$. Чтобы в рассматриваемом случае получить пригодное асимптотическое разложение, выразим функцию возбуждения через T_0 и T_1 в соответствии с равенством

$$K \cos \lambda t = \varepsilon k \cos(\omega_0 t + \sigma\varepsilon t) = \varepsilon k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1). \quad (6.2.59)$$

Для функции возбуждения такого вида величины u_0 и u_1 из (6.2.41) будут удовлетворять уравнениям

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (6.2.60)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1). \quad (6.2.61)$$

Общее решение уравнения (6.2.60) имеет вид

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6.2.62)$$

Уравнение (6.2.61), следовательно, примет вид

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = \left[i\omega_0 (-2A' + A - A^2 \bar{A}) + \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1} \right] e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.63)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках в (6.2.63) зависит только от T_1 , то слагаемые, пропорциональные $\exp(\pm i\omega_0 T_0)$, порождают вековые члены относительно масштаба времени T_0 . Чтобы отношение u_1/u_0 было ограниченным при всех T_0 , следует потребовать

$$2A' = A - A^2 \bar{A} - \frac{1}{2\omega_0} i k e^{i\sigma T_1}. \quad (6.2.64)$$

Для решения уравнения (6.2.64) положим в нем $A = (1/2) a \exp i\varphi$ и, выделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \varphi), \quad (6.2.65)$$

$$\frac{d\varphi}{dT_1} = -\frac{k}{2\omega_0 a} \cos(\sigma T_1 - \varphi). \quad (6.2.66)$$

Желая исключить в правых частях (6.2.65) и (6.2.66) явную зависимость от времени, положим

$$\psi = \sigma T_1 - \varphi \quad \text{или} \quad \frac{d\psi}{dT_1} = \sigma - \frac{d\varphi}{dT_1}. \quad (6.2.67)$$

Уравнения (6.2.65) и (6.2.66), следовательно, примут вид

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin \psi, \quad (6.2.68)$$

$$\frac{d\psi}{dT_1} = \sigma + \frac{k}{2\omega_0 a} \cos \psi. \quad (6.2.69)$$

Периодические решения возбуждаемого внешними силами осциллятора (6.2.40) соответствуют стационарным решениям уравнений (6.2.68) и (6.2.69), т. е. соответствуют равенствам $da/dT_1 = d\psi/dT_1 = 0$, или иначе

$$\frac{1}{2} \tilde{a} \left(1 - \frac{1}{4} \tilde{a}^2 \right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin \tilde{\psi} = 0, \quad (6.2.70)$$

$$\sigma + \frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}} \cos \tilde{\psi} = 0. \quad (6.2.71)$$

Величины, помеченные волной, относятся здесь к стационарному решению. Исключив из этих уравнений $\tilde{\psi}$, получим следующее уравнение для частотной характеристики:

$$\rho(1-\rho)^2 + 4\sigma^2\rho = \frac{k^2}{4\omega_0^2} = F^2, \quad \rho = \frac{\tilde{a}^2}{4}. \quad (6.2.72)$$

Для заданных амплитуды ϵk и частоты $\lambda = \omega_0 + \epsilon\sigma$ возбуждения соотношение (6.2.72) определяет значение ρ и, следовательно, амплитуду гармонических колебаний. В первом приближении гармоническое колебание задается равенством

$$u = \tilde{a} \cos(\omega_0 t + \tilde{\varphi}) + O(\epsilon), \quad (6.2.73)$$

причем частота колебаний равна

$$\omega = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \tilde{\varphi}) = \omega_0 + \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sigma = \lambda. \quad (6.2.74)$$

Следовательно, при приближении λ к ω_0 собственные колебания совпадают с вынужденными. В результате выходной сигнал синхронизируется с частотой возбуждения.

Для исследования устойчивости этих гармонических колебаний положим

$$a = \tilde{a} + \Delta a, \quad \psi = \tilde{\psi} + \Delta \psi. \quad (6.2.75)$$

Разлагая правые части уравнений (6.2.68) и (6.2.69) по степеням Δa и $\Delta \psi$ и сохраняя только линейные члены, получим

$$\frac{d(\Delta a)}{dT_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \tilde{a}^2 \right) \Delta a + \frac{k}{2\omega_0} \cos \tilde{\psi} \Delta \psi, \quad (6.2.76)$$

$$\frac{d(\Delta \psi)}{dT_1} = -\frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}^2} \cos \tilde{\psi} \Delta a - \frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}} \sin \tilde{\psi} \Delta \psi. \quad (6.2.77)$$

Предположим, что Δa и $\Delta \psi$ пропорциональны $\exp mT_1$. Тогда коэффициент m должен удовлетворять уравнению

$$m^2 - \Omega m + \Delta = 0, \quad (6.2.78)$$

где приняты обозначения

$$\Omega = 1 - 2\rho, \quad \Delta = \frac{1}{4} (1 - 4\rho + 3\rho^2) + \sigma^2. \quad (6.2.79)$$

При выводе этих соотношений мы воспользовались уравнениями (6.2.70) и (6.2.71). Дискриминант уравнения (6.2.78) равен

$$D = \rho^2 - 4\sigma^2. \quad (6.2.80)$$

Кривые, определяемые равенствами $\Omega = \Delta = D = 0$, называются сепаратрисами и показаны на рис. 6.1. Кривая $\Delta = 0$ представляет собой эллипс с центром в точке $\rho = 2/3$, $\sigma = 0$; геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению $D = 0$, являются две прямые линии $\rho = \pm 2\sigma$. Точки, лежащие внутри эллипса, соответствуют наличию седловой точки; следовательно, соответствующие им гармонические колебания неустойчивы. Точки, лежащие вне эллипса, соответствуют наличию узла при $D \geq 0$ и наличию фокуса при $D < 0$. Гармонические колебания, соответствующие этим точкам, будут устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от того, больше ли ρ , чем $1/2$, или меньше.

Жесткое резонансное возбуждение. Данный случай может быть исследован как частный случай предыдущего, соответствующий $k = K/\varepsilon$, причем амплитуда возбуждения $K = O(1)$. Следовательно,

k — очень большая величина, поскольку ε мало. Тогда из (6.2.72) следует, что для σ , близких к нулю, существует только одна амплитуда ρ гармонических колебаний, и последние являются устойчивыми. При неограниченном увеличении k амплитуда также растет неограниченно.

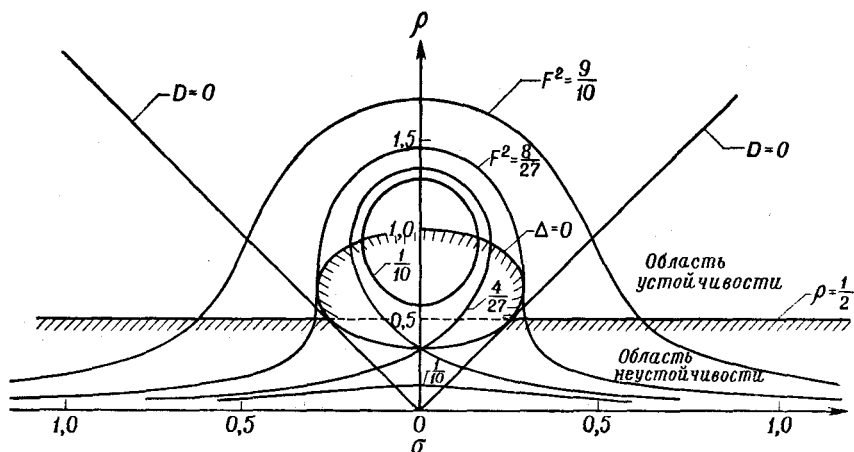


Рис. 6.1.

6.2.4. Параметрический резонанс — уравнение Матьё

Вернемся к уравнению Матьё, рассмотренному в п. 3.1.2, а именно к уравнению

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t) u = 0. \quad (6.2.81)$$

Согласно теории Флоке линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, плоскость параметров δ — ε разбивается переходными кривыми на области устойчивости и неустойчивости, причем на самих кривых решение u периодически с периодом π или 2π . В п. 3.1.2 были определены приближения к переходным кривым с помощью метода Линдштедта — Пуанкаре. В данном пункте будут найдены не только переходные кривые, но также и решения u , следовательно, степень устойчивости или неустойчивости, как это было сделано в п. 3.1.3 с помощью метода Уиттекера. Чтобы выполнить это, положим при положительном ω_0

$$\delta = \omega_0^2 \quad (6.2.82)$$

и предположим, что

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (6.2.83)$$

Следует различать случаи, когда значение ω_0 близко к целому числу n и когда оно далеко от целочисленных значений.

Решение для значений ω_0 , далеких от целого числа. Выразим $\cos 2t$ через масштаб времени T_0 в виде $\cos 2T_0$. Подставив (6.2.83) в (6.2.81) и приравняв нулю коэффициенты при ϵ^0 , ϵ и ϵ^2 , получим

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (6.2.84)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0 \cos 2T_0, \quad (6.2.85)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - u_1 \cos 2T_0. \quad (6.2.86)$$

Решение уравнения (6.2.84) имеет вид

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6.2.87)$$

Подстановка u_0 в (6.2.85) дает

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 T_0} - \frac{1}{2} A e^{i(\omega_0+2)T_0} - \frac{1}{2} A e^{i(\omega_0-2)T_0} + CC. \quad (6.2.88)$$

Поскольку значение ω_0 далеко от 1, то вековые члены будут отсутствовать при условии $D_1 A = 0$, т. е. $A = A(T_2)$. Тогда решением для u_1 будет функция

$$u_1 = \frac{1}{8(\omega_0+1)} A e^{i(\omega_0+2)T_0} - \frac{1}{8(\omega_0-1)} A e^{i(\omega_0-2)T_0} + CC. \quad (6.2.89)$$

Подстановка u_0 и u_1 в (6.2.86) дает

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = & -2 \left[i\omega_0 D_2 A - \frac{A}{16(\omega_0^2-1)} \right] e^{i\omega_0 T_0} - \\ & - \frac{1}{16(\omega_0+1)} A e^{i(\omega_0+4)T_0} - \frac{1}{16(\omega_0-1)} A e^{i(\omega_0-4)T_0} + CC. \end{aligned} \quad (6.2.90)$$

Поскольку значение ω_0 далеко от 1 и от 2, то вековые члены будут исключены при условии

$$D_2 A = - \frac{i}{16\omega_0(\omega_0^2-1)} A. \quad (6.2.91)$$

Положив $A = (1/2)a \exp i\varphi$ и отделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{da}{dT_2} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dT_2} = - \frac{1}{16\omega_0(\omega_0^2-1)}. \quad (6.2.92)$$

Отсюда имеем

$$a = \text{const}, \quad \varphi = - \frac{1}{16\omega_0(\omega_0^2-1)} T_2 + \varphi_0, \quad (6.2.93)$$

где φ_0 — постоянная. С учетом условия (6.2.91) решение уравнения (6.2.90) имеет вид

$$u_2 = \frac{1}{128(\omega_0+1)(\omega_0+2)} A e^{i(\omega_0+4)T_0} + \frac{1}{128(\omega_0-1)(\omega_0-2)} A e^{i(\omega_0-4)T_0} + CC. \quad (6.2.94)$$

Суммируя, получим решение для u с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ & + \frac{\varepsilon a}{8} \left\{ \frac{1}{\omega_0+1} \cos[(\omega+2)t + \varphi_0] - \frac{1}{\omega_0-1} \cos[(\omega-2)t + \varphi_0] \right\} + \\ & + \frac{\varepsilon^2 a}{128} \left\{ \frac{1}{(\omega_0+1)(\omega_0+2)} \cos[(\omega+4)t + \varphi_0] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\omega_0-1)(\omega_0-2)} \cos[(\omega-4)t + \varphi_0] \right\} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (6.2.95)$$

где принято обозначение

$$\omega = \omega_0 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega_0(\omega_0^2-1)} + O(\varepsilon^3). \quad (6.2.96)$$

Вновь подчеркнем, что полученное разложение справедливо только при условии, что ω_0 далеко от 1 и от 2. При $\omega_0 \rightarrow 1$ или 2 имеем $u \rightarrow \infty$. Разложение, справедливое в окрестности $\omega_0 = 1$, будет построено ниже.

Решение для значений ω_0 , близких к 1. В этом случае полагаем

$$\delta = 1 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots, \quad (6.2.97)$$

причем δ_1 и $\delta_2 = O(1)$. Равенство (6.2.97) преобразует уравнения (6.2.84) — (6.2.86) к виду

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (6.2.98)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \delta_1 u_0 - u_0 \cos 2T_0, \quad (6.2.99)$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_0 - u_1 \cos 2T_0. \quad (6.2.100)$$

Решением уравнения (6.2.98) является функция

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (6.2.101)$$

Подстановка u_0 в (6.2.99) дает

$$D_0^2 u_1 + u_1 = \left(-2iD_1 A - \delta_1 A - \frac{1}{2} \bar{A} \right) e^{iT_0} - \frac{1}{2} A e^{3iT_0} + CC. \quad (6.2.102)$$

Вековые члены относительно масштаба времени T_0 будут исключены при условии

$$D_1 A = \frac{1}{2} i \left(\delta_1 A + \frac{1}{2} \bar{A} \right). \quad (6.2.103)$$

Тогда решение уравнения (6.2.102) будет иметь вид

$$u_1 = \frac{1}{16} (A e^{3iT_0} + \bar{A} e^{-3iT_0}). \quad (6.2.104)$$

Чтобы решить уравнение (6.2.103), предположим, что

$$A = A_r + iA_i, \quad (6.2.105)$$

где A_r и A_i — действительные величины. Отделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{\partial A_r}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) A_i, \quad (6.2.106)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) A_r. \quad (6.2.107)$$

Решениями этих уравнений будут функции

$$A_r = a_1(T_2) e^{\gamma_1 T_1} + a_2(T_2) e^{-\gamma_1 T_1}, \quad (6.2.108)$$

$$A_i = \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} [a_1(T_2) e^{\gamma_1 T_1} - a_2(T_2) e^{-\gamma_1 T_1}], \quad (6.2.109)$$

где

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \delta_1^2 \right). \quad (6.2.110)$$

Здесь a_1 и a_2 — действительные функции масштаба времени T_2 ; в первом приближении, однако, a_1 и a_2 — постоянные.

Из равенств (6.2.108)–(6.2.110) видно, что A экспоненциально растет вместе с T_1 (т. е. вместе с t), если γ_1 — действительная величина, т. е. если выполнено $|\delta_1| \leq 1/2$. Если же γ_1 — мнимая величина, т. е. выполнено $|\delta_1| \geq 1/2$, то A осциллирует с ростом T_1 (в этом случае решение выражается через $\cos \gamma_1 T_1$ и $\sin \gamma_1 T_1$). Следовательно, границы (переходные кривые), которые отделяют область устойчивости от области неустойчивости и исходят из точки $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, задаются в первом приближении равенствами $\delta_1 = \pm 1/2$, или

$$\delta = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (6.2.111)$$

Чтобы определить второе приближение к u и к переходным кривым, подставим u_0 и u_1 в уравнение (6.2.100) и перепишем его в виде

$$D_0^2 u_2 + u_2 = - \left[2i D_2 A + D_1^2 A + \left(\delta_2 + \frac{1}{32} \right) A \right] e^{iT_0} + CC + NST. \quad (6.2.112)$$

Чтобы не было вековых членов, нужно, чтобы выполнялось условие

$$2iD_2A + D_1^2A + \left(\delta_2 + \frac{1}{32}\right)A = 0. \quad (6.2.113)$$

Вспоминая, что $A = A_r + iA_i$, и отделяя в уравнении (6.2.113) действительную и мнимую части, получим следующие уравнения для A_r и A_i :

$$2\frac{\partial A_r}{\partial T_2} + \alpha A_i = 0, \quad (6.2.114)$$

$$-2\frac{\partial A_i}{\partial T_2} + \alpha A_r = 0, \quad (6.2.115)$$

где

$$\alpha = \gamma_1^2 + \delta_2 + \frac{1}{32}. \quad (6.2.116)$$

Заменим A_r и A_i на выражения (6.2.108) и (6.2.109) и приравняем нулю коэффициенты при $\exp(\pm \gamma_1 T_1)$, поскольку они являются функциями T_2 . Получим уравнения

$$2\frac{da_1}{dT_2} + \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} \alpha a_1 = 0, \quad -\frac{4\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} \frac{da_1}{dT_2} + \alpha a_1 = 0, \quad (6.2.117)$$

$$2\frac{da_2}{dT_2} - \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} \alpha a_2 = 0, \quad \frac{4\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} \frac{da_2}{dT_2} + \alpha a_2 = 0. \quad (6.2.118)$$

Из этих уравнений следует

$$\frac{da_1}{dT_2} = \frac{da_2}{dT_2} = 0 \quad \text{или} \quad a_1 = \text{const}, \quad a_2 = \text{const}, \quad (6.2.119)$$

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \delta_2 = -\gamma_1^2 - \frac{1}{32}. \quad (6.2.120)$$

Таким образом, решение во втором приближении задается соотношениями (3.1.57)–(3.1.62), которые были получены методом Уиттекера.

6.2.5. Осциллятор Ван-дер-Поля с запаздывающей амплитудой

В качестве следующего примера в отличие от предыдущих примеров второго порядка рассмотрим задачу третьего порядка. В безразмерном виде она задается уравнениями

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 2\mu \frac{d}{dt} [(1-Z)v] + 2\frac{dv}{dt}, \quad (6.2.121)$$

$$\tau \frac{dZ}{dt} + Z = v^2. \quad (6.2.122)$$

Здесь v — напряжение, t — время, e — возбуждение, ω_0 — собственная частота, τ — время запаздывания, Z — выход низкочастотного фильтра, μ — характеристика усиления во вспомогательном контуре. Впервые этот осциллятор был изучен Гоулеем [1964] и затем Скоттом [1966] и Найфэ [1967b], [1968]. Здесь мы рассмотрим свободные колебания (т. е. примем $e \equiv 0$), отослав читателя, интересующегося случаем вынужденных колебаний, к Найфэ [1968].

Для нахождения первых приближений к решениям приведенных выше уравнений предположим, что

$$v = v_0(T_0, T_1) + \mu v_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.123)$$

$$Z = Z_0(T_0, T_1) + \mu Z_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.124)$$

причем

$$T_0 = t, \quad T_1 = \mu t. \quad (6.2.125)$$

Подставив (6.2.123)—(6.2.125) в уравнения (6.2.121) и (6.2.122) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$D_0^2 v_0 + \omega_0^2 v_0 = 0, \quad (6.2.126)$$

$$\tau D_0 Z_0 + Z_0 = v_0^2, \quad (6.2.127)$$

$$D_0^2 v_1 + \omega_0^2 v_1 = 2D_0[(1 - Z_0)v_0 - D_1 v_0], \quad (6.2.128)$$

$$\tau D_0 Z_1 + Z_1 = -\tau D_1 Z_0 + 2v_0 v_1. \quad (6.2.129)$$

Решение уравнения (6.2.126) имеет вид

$$v_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6.2.130)$$

Подстановка v_0 в (6.2.127) дает

$$\tau D_0 Z_0 + Z_0 = A \bar{A} + A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + CC. \quad (6.2.131)$$

Решением этого уравнения является функция

$$Z_0 = B(T_1) e^{-T_0/\tau} + 2A \bar{A} + \frac{A^2 e^{2i\omega_0 T_0}}{1 + 2i\omega_0 \tau} + \frac{\bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}}{1 - 2i\omega_0 \tau}. \quad (6.2.132)$$

Поскольку v_0 и Z_0 найдены, уравнение (6.2.128) можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_0^2 v_1 + \omega_0^2 v_1 = 2i\omega_0 Q(T_1) e^{i\omega_0 T_0} - 2AB \left(i\omega_0 - \frac{1}{\tau} \right) e^{[i\omega_0 - (1/\tau)] T_0} - \\ - 6i\omega_0 \frac{A^3 e^{3i\omega_0 T_0}}{1 + 2i\omega_0 \tau} + CC, \end{aligned} \quad (6.2.133)$$

где принято обозначение

$$Q = A - 2A^2 \bar{A} - \frac{A^2 \bar{A}}{1 + 2i\omega_0 \tau} - D_1 A. \quad (6.2.134)$$

Вековые члены будут исключены при условии $Q=0$. Тогда решение для v_1 имеет вид

$$v_1 = 2AB\tau \frac{1-i\omega_0\tau}{1-2i\omega_0\tau} e^{[i\omega_0-(1/\tau)]T_0} + \frac{3i}{4\omega_0} \frac{A^3 e^{3i\omega_0 T_0}}{1+2i\omega_0\tau} + CC. \quad (6.2.135)$$

Чтобы решить уравнение $Q=0$, положим в нем $A=(1/2)ae^{i\varphi}$, где a и φ — действительные величины, и отделим действительную и мнимую части в (6.2.134). Получим уравнения

$$\frac{da}{dT_1} = a \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_r a^2 \right), \quad (6.2.136)$$

$$\frac{d\varphi}{dT_1} = -\frac{1}{4} \alpha_i a^2, \quad (6.2.137)$$

где

$$\alpha_r = \frac{3+8\omega_0^2\tau^2}{1+4\omega_0^2\tau^2}, \quad \alpha_i = -\frac{2\omega_0\tau}{1+4\omega_0^2\tau^2}. \quad (6.2.138)$$

Решения уравнений (6.2.136) и (6.2.137) имеют вид

$$a^2 = \frac{4}{\alpha_r + \left(\frac{4}{a_0^2} - \alpha_r \right) e^{-2\mu t}}, \quad (6.2.139)$$

$$\varphi = \frac{\tau\omega_0}{3+8\omega_0^2\tau^2} \ln \left[\frac{4}{a_0^2} + \alpha_r (e^{2\mu t} - 1) \right] + \varphi_0, \quad (6.2.140)$$

где a_0 — начальная амплитуда, φ_0 — постоянная.

Для нахождения B подставим выражения для v_0 , Z_0 и v_1 в (6.2.129). Придем к уравнению

$$\tau D_0 Z_1 + Z_1 = \left[-\tau D_1 B + 8\tau \frac{1+2\omega_0^2\tau^2}{1+4\omega_0^2\tau^2} A \bar{A} B \right] e^{-T_0/\tau} + NST. \quad (6.2.141)$$

Для того чтобы отношение Z_1/Z_0 было ограниченным для всех T_0 , коэффициент при $\exp(-T_0/\tau)$ должен обратиться в нуль. С учетом равенства $A=(1/2)a \exp i\varphi$ получим

$$D_1 B = 2 \frac{1+2\omega_0^2\tau^2}{1+4\omega_0^2\tau^2} a^2 B. \quad (6.2.142)$$

Подставив выражение для a^2 из (6.2.139) в (6.2.142) и разрешив полученное уравнение, найдем

$$B = b \left[\frac{4}{a_0^2} + \alpha_r (e^{2\mu t} - 1) \right]^\zeta, \quad (6.2.143)$$

где

$$\zeta = \frac{4(1+2\omega_0^2\tau^2)}{3+8\omega_0^2\tau^2}.$$

Следовательно, имеем в первом приближении

$$v = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + O(\mu), \quad (6.2.144)$$

$$Z = Be^{-1/\tau} + \frac{a^2}{2\sqrt{1+4\omega_0^2\tau^2}} \cos[2\omega_0 t + 2\varphi - \arctg 2\omega_0\tau] + \frac{1}{2}a^2 + O(\mu). \quad (6.2.145)$$

Здесь a , φ и B задаются соответственно равенствами (6.2.139), (6.2.140) и (6.2.143).

6.2.6. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел

В качестве двух следующих примеров рассмотрим задачи четвертого порядка, причем первая из них — линейная, вторая — нелинейная. Рассмотрим сначала устойчивость треугольных точек в ограниченной задаче трех тел, исследованной в п.3.1.4 и 3.1.5 с помощью методов Линдштедта — Пуанкаре и Уиттекера. С помощью метода многих масштабов эта задача впервые была рассмотрена Олфрендом и Рэндом [1969]. Математически задача сводится к исследованию устойчивости решений уравнений (3.1.63) — (3.1.65). В этом пункте с помощью метода многих масштабов определим переходные кривые, пересекающие ось μ в точке $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2/3})/2$, и выявим поведение x и y в окрестности этих кривых.

Положим $\cos f = \cos T_0$ и предположим, что

$$x = x_0(T_0, T_1) + ex_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.146)$$

$$y = y_0(T_0, T_1) + ey_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.147)$$

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + \dots, \quad (6.2.148)$$

причем

$$T_0 = f, \quad T_1 = ef. \quad (6.2.149)$$

Имеем, следовательно,

$$\frac{d}{df} = D_0 + eD_1 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (6.2.150)$$

Подставим (6.2.146) — (6.2.150) в уравнения (3.1.63) — (3.1.65) и приравняем нулю коэффициенты при e^0 и e . Получим, приравнявая члены:

порядка e^0

$$D_0^2 x_0 - 2D_0 y_0 - b_0 x_0 = 0, \quad (6.2.151)$$

$$D_0^2 y_0 + 2D_0 x_0 - a_0 y_0 = 0; \quad (6.2.152)$$

порядка e

$$D_0^2 x_1 - 2D_0 y_1 - b_0 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + 2D_1 y_0 + b_1 x_0 - b_0 x_0 \cos T_0, \quad (6.2.153)$$

$$D_0^2 y_1 + 2D_0 x_1 - a_0 y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2D_1 x_0 - b_1 y_0 - a_0 y_0 \cos T_0. \quad (6.2.154)$$

Здесь a_i и b_i задаются соотношениями (3.1.71) и (3.1.72).

Решение системы (6.2.151) и (6.2.152) имеет вид

$$x_0 = A(T_1) \cos \frac{1}{2} T_0 + B(T_1) \sin \frac{1}{2} T_0, \quad (6.2.155)$$

$$y_0 = \alpha B(T_1) \cos \frac{1}{2} T_0 - \alpha A(T_1) \sin \frac{1}{2} T_0, \quad (6.2.156)$$

где

$$\alpha = \left(a_0 + \frac{1}{4}\right)^{-1} = b_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{33}). \quad (6.2.157)$$

Решение нулевого порядка определяет правые части уравнений (6.2.153) и (6.2.154). Таким образом, они запишутся в виде

$$D_0^2 x_1 - 2D_0 y_1 - b_0 x_1 = P_1 \cos \frac{1}{2} T_0 + Q_1 \sin \frac{1}{2} T_0 + NST, \quad (6.2.158)$$

$$D_0^2 y_1 + 2D_0 x_1 - a_0 y_1 = P_2 \cos \frac{1}{2} T_0 + Q_2 \sin \frac{1}{2} T_0 + NST, \quad (6.2.159)$$

где приняты обозначения

$$P_1 = (2\alpha - 1) B' + \left(b_1 - \frac{1}{2} b_0\right) A, \quad (6.2.160)$$

$$P_2 = (\alpha - 2) A' - \alpha \left(b_1 + \frac{1}{2} a_0\right) B, \quad (6.2.161)$$

$$Q_1 = -(2\alpha - 1) A' + \left(b_1 + \frac{1}{2} b_0\right) B, \quad (6.2.162)$$

$$Q_2 = (\alpha - 2) B' + \alpha \left(b_1 - \frac{1}{2} a_0\right) A. \quad (6.2.163)$$

Для нахождения первого приближения не обязательно решать уравнения для x_1 и y_1 ; достаточно только обеспечить ограниченность отношений x_1/x_0 и y_1/y_0 при всех T_0 . Именно по этой причине мы выписываем слагаемые, которые порождают вековые члены. Для того чтобы исключить вековые члены, можно найти сначала частное вековое решение и определить затем условие его обращения в нуль. Такое частное решение может быть записано в одном из видов

$$x = 0, \quad y = R_1 \cos \frac{1}{2} T_0 + S_1 \sin \frac{1}{2} T_0, \quad (6.2.164)$$

$$y = 0, \quad x = R_2 \cos \frac{1}{2} T_0 + S_2 \sin \frac{1}{2} T_0. \quad (6.2.165)$$

Таким образом, задавшись частным решением вида (6.2.164) или (6.2.165), можем получить условия, при которых вековые члены исключаются. Используя любой из видов решения, получим один и тот же результат. Подставив (6.2.164) в (6.2.158) и (6.2.159) и приравняв коэффициенты при $\cos(T_0/2)$ и $\sin(T_0/2)$ в обеих частях, получим

$$R_1 = Q_1, \quad S_1 = -P_1, \quad (6.2.166)$$

$$R_1 = -\alpha P_2, \quad S_1 = -\alpha Q_2. \quad (6.2.167)$$

Исключив R_1 и S_1 из (6.2.166) и (6.2.167), получим искомые условия; они имеют вид

$$P_1 = \alpha Q_2, \quad Q_1 = -\alpha P_2. \quad (6.2.168)$$

Подставляя выражения для P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 из (6.2.160)—(6.2.163) в (6.2.168), получим следующие два уравнения для A и B :

$$(1 - 4\alpha + \alpha^2) A' + \left[(1 - \alpha^2) b_1 + \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] B = 0, \quad (6.2.169)$$

$$(1 - 4\alpha + \alpha^2) B' - \left[(1 - \alpha^2) b_1 - \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] A = 0. \quad (6.2.170)$$

Для решения этих уравнений положим в них

$$A = a \exp \gamma_1 T_1, \quad B = b \exp \gamma_1 T_1 \quad (6.2.171)$$

и получим уравнения

$$(1 - 4\alpha + \alpha^2) \gamma_1 a + \left[(1 - \alpha^2) b_1 + \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] b = 0, \quad (6.2.172)$$

$$- \left[(1 - \alpha^2) b_1 - \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] a + (1 - 4\alpha + \alpha^2) b \gamma_1 = 0. \quad (6.2.173)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.1.105) и (3.1.106), полученными с помощью метода Уиттекера. Следовательно, γ_1 и b/a задаются соотношениями (3.1.107) и (3.1.108), а x и y — соотношениями (3.1.109). Олфренд и Рэнд [1969] продолжили это разложение до второго порядка.

6.2.7. Качающаяся пружина

Ниже рассмотрим нелинейную качающуюся пружину, исследованную в п.5.5.3 и 5.7.5 и описываемую лагранжианом (5.5.54). Этому лагранжиану соответствуют уравнения движения

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x + g(1 - \cos \theta) - (l + x) \dot{\theta}^2 = 0, \quad (6.2.174)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l+x} \sin \theta + \frac{\gamma}{l+x} x \dot{\theta} = 0. \quad (6.2.175)$$

Для малых, но конечных значений x и θ будем искать решения этих уравнений вида

$$x(t) = \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.176)$$

$$\theta(t) = \varepsilon \theta_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 \theta_2(T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.177)$$

где $T_n = \varepsilon^n t$, а ε — величина того же порядка, что и амплитуда колебаний.

Подставим (6.2.176) и (6.2.177) в (6.2.174) и (6.2.175) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим, приравнявая члены:

порядка ε

$$D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad (6.2.178)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \omega_2^2 \theta_1 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l}; \quad (6.2.179)$$

порядка ε^2

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - \frac{1}{2} g \theta_1^2 + l (D_0 \theta_1)^2, \quad (6.2.180)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -2D_0 D_1 \theta_1 + \frac{\omega_2^2}{l} x_1 \theta_1 - \frac{2}{l} (D_0 x_1) (D_0 \theta_1). \quad (6.2.181)$$

Решения уравнений первого порядка имеют вид

$$x_1 = A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_1 T_0}, \quad (6.2.182)$$

$$\theta_1 = B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_2 T_0}. \quad (6.2.183)$$

С учетом этих решений уравнения (6.2.180) и (6.2.181) примут вид

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -2i\omega_1 D_1 A e^{i\omega_1 T_0} - \frac{3}{2} g B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + \frac{1}{2} g B \bar{B} + CC, \quad (6.2.184)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -2i\omega_2 D_1 B e^{i\omega_2 T_0} + \frac{\omega_2 (\omega_2 + 2\omega_1)}{l} A B e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \\ + \frac{\omega_2 (\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \bar{B} e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + CC. \quad (6.2.185)$$

При постоянных A и B частные решения уравнений (6.2.184) и (6.2.185) имеют вид

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega_1^2} B \bar{B} - \frac{3}{2} \frac{g}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + CC, \quad (6.2.186)$$

$$\theta_2 = -\frac{\omega_2 (\omega_2 + 2\omega_1)}{l \omega_1 (\omega_1 + 2\omega_2)} A B e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} - \frac{\omega_2 (\omega_2 - 2\omega_1)}{l \omega_1 (\omega_1 - 2\omega_2)} A \bar{B} e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + CC. \quad (6.2.187)$$

При $\omega_1 \rightarrow 2\omega_2$ они стремятся к ∞ . Следовательно, разложения (6.2.176) и (6.2.177) нарушаются при $\omega_1 \approx 2\omega_2$.

Чтобы получить разложение, пригодное для $\omega_1 \approx 2\omega_2$, положим

$$\omega_1 - 2\omega_2 = \epsilon\sigma, \quad \sigma = O(1), \quad (6.2.188)$$

причем будем считать A и B не постоянными, а функциями T_1 . Кроме того, используя (6.2.188), выразим $\exp(2i\omega_2 T_0)$ и $\exp[i(\omega_1 - \omega_2)T_0]$ в уравнениях (6.2.184) и (6.2.185) в виде

$$\begin{aligned} \exp(2i\omega_2 T_0) &= \exp(i\omega_1 T_0 - i\sigma T_1), \\ \exp[i(\omega_1 - \omega_2)T_0] &= \exp(i\omega_2 T_0 + i\sigma T_1). \end{aligned}$$

Получим

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = - \left(2i\omega_1 D_1 A + \frac{3}{2} g B^2 e^{-i\sigma T_1} \right) e^{i\omega_1 T_0} + CC + NST, \quad (6.2.189)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = - \left[2i\omega_2 D_1 B - \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \bar{B} e^{i\sigma T_1} \right] e^{i\omega_2 T_0} + CC + NST. \quad (6.2.190)$$

Исключая вековые члены, получим

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A &= -\frac{3}{2} g B^2 \exp(-i\sigma T_1), \\ 2i\omega_2 D_1 B &= \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \bar{B} \exp(i\sigma T_1). \end{aligned} \quad (6.2.191)$$

Полагая $A = -(1/2) i a_1 \exp(i\omega_1 \beta_1)$ и $B = -(1/2) i a_2 \exp(i\omega_2 \beta_2)$ при действительных a_i и β_i и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\dot{a}_1 = \frac{3\epsilon g}{8\omega_1} a_2^2 \cos \gamma, \quad (6.2.192)$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{3\epsilon\omega_2}{4l} a_1 a_2 \cos \gamma, \quad (6.2.193)$$

$$a_1 \dot{\beta}_1 = -\frac{3\epsilon g}{8\omega_1^2} a_2^2 \sin \gamma, \quad (6.2.194)$$

$$\dot{\beta}_2 = -\frac{3\epsilon}{4l} a_1 \sin \gamma, \quad (6.2.195)$$

где принято обозначение

$$\gamma = \omega_1 \beta_1 - 2\omega_2 \beta_2 + (\omega_1 - 2\omega_2) t. \quad (6.2.196)$$

Если в уравнениях (6.2.192)–(6.2.196) положить $a_1^2 = \omega_1 \alpha_1^* / \omega_2 k$ и $a_2^2 = 2\alpha_2 / mgl$, то они перейдут в уравнения (5.5.76)–(5.5.80), полученные с помощью метода усреднения в канонических переменных.

6.2.8. Модель для слабой нелинейной неустойчивости

Ниже рассмотрим модельную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u &= u^3, \\ u(x, 0) &= \varepsilon \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.197)$$

о слабой нелинейной неустойчивости стоячих волн, которая была исследована в п.2.1.2, 3.4.2 и 3.5.1. Для значений k , далеких от $k=1$, равномерно пригодное решение для стоячих волн имеет вид (п.3.4.2)

$$u = \varepsilon \cos \sigma t \cos kx + O(\varepsilon^3), \quad (6.2.198)$$

где

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1} \left[1 - \frac{9\varepsilon^2}{32(k^2 - 1)} \right] + \dots$$

Очевидно, что это разложение нарушается при $k-1 = O(\varepsilon^2)$.

Для нахождения разложения, пригодного в окрестности $k=1$, введем новую переменную $\xi = kx$ и приведем (6.2.197) к виду

$$\begin{aligned} u_{tt} - k^2 u_{\xi\xi} - u &= u^3, \\ u(\xi, 0) &= \varepsilon \cos \xi, \quad u_t(\xi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (6.2.199)$$

Кроме того, положим

$$k = 1 + \varepsilon^2 k_2, \quad k_2 = O(1) \quad (6.2.200)$$

и предположим, что

$$u(\xi, t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, \quad (6.2.201)$$

где $T_n = \varepsilon^n t$.

Подставим (6.2.200) и (6.2.201) в (6.2.199) и приравняем коэффициенты при равных степенях ε . Получим, приравнявая члены: порядка ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - u_1 &= 0, \\ u_1 &= \cos \xi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial T_0} = 0 \quad \text{при} \quad T_n = 0; \end{aligned} \quad (6.2.202)$$

порядка ε^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 &= -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1}, \\ u_2 &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial T_0} = -\frac{\partial u_1}{\partial T_1} \quad \text{при} \quad T_n = 0; \end{aligned} \quad (6.2.203)$$

порядка ε^3

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - u_3 = u_1^3 + 2k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2},$$

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial T_0} = -\frac{\partial u_1}{\partial T_2} - \frac{\partial u_2}{\partial T_1} \quad \text{при} \quad T_n = 0. \quad (6.2.204)$$

Решение задачи первого порядка имеет вид

$$u_1 = a(T_1, T_2) \cos \xi, \quad a(0, 0) = 1. \quad (6.2.205)$$

Тогда (6.2.203) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 = 0,$$

$$u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial T_0} = -\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}\right) \cos \xi \quad \text{при} \quad T_n = 0. \quad (6.2.206)$$

Решение задачи (6.2.206) будет содержать член, пропорциональный T_0 , из-за которого отношение u_2/u_1 не ограничено при $T_0 \rightarrow \infty$. Этот член исчезнет при условии $\partial a / \partial T_1 = 0$ для $T_1 = T_2 = 0$. Тогда получим

$$u_2 = b(T_1, T_2) \cos \xi, \quad b(0, 0) = 0. \quad (6.2.207)$$

При известных решениях первого и второго порядков уравнение для u_3 запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - u_3 = \left(\frac{3}{4} a^3 - 2k a - \frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2}\right) \cos \xi + \frac{1}{4} a^3 \cos 3\xi. \quad (6.2.208)$$

Вековые члены будут исключены при условии

$$\frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2} + \left(2k_2 - \frac{3}{4} a^2\right) a = 0. \quad (6.2.209)$$

Выше были получены начальные условия для a в виде

$$a = 1, \quad \frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \quad \text{при} \quad T_n = 0. \quad (6.2.210)$$

Для нахождения функции $b(T_1, T_2)$ и зависимости a от T_2 нужно получить разложение более высокого порядка. Если ограничиться в вычислениях точностью $O(\varepsilon^3)$, то с точностью $O(\varepsilon^2 t)$ величина a может считаться функцией T_1 .

Задача (6.2.209) и (6.2.210) допускает интеграл

$$\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}\right)^2 = \frac{3}{8} (a^2 - 1)(a^2 - \beta), \quad \beta = \frac{16k_2}{3} - 1. \quad (6.2.211)$$

Поскольку $a(T_1)$ — действительная величина, то правая часть в (6.2.211) должна быть положительной. Следовательно, значе-

ние a^2 должно лежать вне интервала с концами 1 и β . Из условия $a(0)=1$ следует, что a^2 неограниченно растет при $\beta < 1$ и колеблется между значениями 0 и 1 при $\beta > 1$. Поэтому значение $\beta = 1$ или $k_2 = 3/8$ отделяет область устойчивости от области неустойчивости. Следовательно, условие нейтральной устойчивости имеет вид

$$k = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon^2 \quad (6.2.212)$$

в согласии с (3.5.6). Решение для a задается эллиптической функцией Якоби.

6.2.9. Модель взаимодействия волна — волна

Рассмотрим вновь модельное уравнение Брезертона [1964]

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} + \varphi_{xx} + \varphi = \varepsilon \varphi^3, \quad (6.2.213)$$

которое было исследовано в п. 5.8.1 и 5.8.2 с помощью вариационного подхода. Линейная задача допускает решение в форме однородной бегущей волны

$$\varphi = a \cos(kx - \omega t + \beta). \quad (6.2.214)$$

Здесь a , k , ω и β — постоянные, а ω и k удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1. \quad (6.2.215)$$

Резонанс в гармонике может возникнуть, когда пары (ω, k) и $(n\omega, nk)$ при некотором $n \geq 2$ удовлетворяют соотношению (6.2.215). Это имеет место для всех $k^2 = 1/n$ при $n \geq 2$. Для указанных волновых чисел основная и n -я гармоники имеют одинаковую фазовую скорость.

Поскольку в нашем уравнении нелинейность является кубической, то порядок $O(\varepsilon)$ будет иметь только взаимодействие основной гармоники, соответствующей $k^2 = 1/3$, с третьей гармоникой ($k^2 = 3$). Если же нелинейность имеет вид $\varepsilon \varphi^m$ при некотором m , то порядок $O(\varepsilon)$ будет иметь взаимодействие основной гармоники ($k^2 = 1/m$) с m -й гармоникой ($k^2 = m$). Если рассматривать взаимодействия более высокого, чем ε , порядка, то даже для кубической нелинейности могут возникнуть резонансы в гармониках, отличных от третьей.

Чтобы построить разложение первого порядка, пригодное в окрестности $k^2 = 1/3$, положим

$$\varphi = \varphi_0(T_0, T_1, X_0, X_1) + \varepsilon \varphi_1(T_0, T_1, X_0, X_1) + \dots, \quad (6.2.216)$$

где

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad X_n = \varepsilon^n x.$$

Подставляя это разложение в (6.2.113) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$L(\varphi_0) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial X_0^4} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial X_0^2} + \varphi_0 = 0, \quad (6.2.217)$$

$$L(\varphi_1) = \varphi_0^3 - 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 4 \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial X_0^3 \partial X_1} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial X_0 \partial X_1}. \quad (6.2.218)$$

Решение уравнения (6.2.217) запишем в виде

$$\varphi_0 = A_1(T_1, X_1)e^{i\theta_1} + A_3(T_1, X_1)e^{i\theta_3} + CC, \quad (6.2.219)$$

$$\theta_n = k_n X_0 - \omega_n T_0,$$

$$\omega_n^2 = k_n^4 - k_n^2 + 1, \quad (6.2.220)$$

$$\omega_3 \approx 3\omega_1, \quad k_3 \approx 3k_1.$$

Отметим, что вид φ_0 предполагает две взаимодействующие гармоники. Можно показать, что функция φ_0 , в которой содержится только $\exp(i\theta_1)$, является непригодной (см. п. 5.8.2 и п. 6.8.4).

Подставив выражение для φ_0 в (6.2.218), получим

$$\begin{aligned} L(\varphi_1) = \sum_{n=1,3} 2i\omega_n \left(\frac{\partial A_n}{\partial T_1} + \omega'_n \frac{\partial A_n}{\partial X_1} \right) e^{i\theta_n} + 3(A_1 \bar{A}_1 + 2A_3 \bar{A}_3) A_1 e^{i\theta_1} + \\ + 3(2A_1 \bar{A}_1 + A_3 \bar{A}_3) A_3 e^{i\theta_3} + A_1^3 e^{3i\theta_1} + A_3^3 e^{3i\theta_3} + \\ + 3A_1^2 A_3 e^{i(\theta_3 + 2\theta_1)} + 3\bar{A}_1^2 A_3 e^{i(\theta_3 - 2\theta_1)} + \\ + 3A_1 A_3^2 e^{i(2\theta_3 + \theta_1)} + 3\bar{A}_1 A_3^2 e^{i(2\theta_3 - \theta_1)} + CC. \end{aligned} \quad (6.2.221)$$

Здесь $\omega'_n = d\omega_n/dk$ — групповая скорость.

Вследствие взаимодействия двух гармоник в уравнении (6.2.221) возникают слагаемые, порождающие вековые члены и отличные от слагаемых обычного вида $\exp(i\theta_n)$. Чтобы выделить эти слагаемые, рассмотрим случай точного резонанса, при котором $\theta_3 = 3\theta_1$, так что выражения $\exp(i\theta_1)$ и $\exp(3i\theta_1)$ порождают вековые члены. Непосредственно видно, что слагаемые $\exp(3i\theta_1)$ и $\exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)]$ порождают вековые члены. Вековой характер этих слагаемых вблизи резонанса можно показать, выразив их через $\exp(i\theta_1)$ и $\exp(i\theta_3)$. С этой целью заметим, что

$$\theta_3 - 3\theta_1 \equiv \Gamma = (k_3 - 3k_1) X_0 - (\omega_3 - 3\omega_1) T_0.$$

Хотя X_0 и T_0 имеют порядок $O(1)$, величина Γ при $k_3 \rightarrow 3k_1$ и $\omega_3 \rightarrow 3\omega_1$ становится медленно меняющейся. Чтобы описать это медленное изменение, выразим Γ в виде

$$\Gamma = \frac{k_3 - 3k_1}{\varepsilon} X_1 - \frac{\omega_3 - 3\omega_1}{\varepsilon} T_1. \quad (6.2.222)$$

С помощью этой функции величины $\exp(3i\theta_1)$ и $\exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)]$ примут вид

$$\exp(3i\theta_1) = \exp[i(\theta_3 - \Gamma)], \quad \exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)] = \exp[i(\theta_1 + \Gamma)].$$

Исключая в правой части уравнения (6.2.221) слагаемые, порождающие вековые члены, найдем

$$2i\omega_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) = -3(A_1 \bar{A}_1 + 2A_3 \bar{A}_3) A_1 - 3\bar{A}_1^2 A_3 e^{i\Gamma}, \quad (6.2.223)$$

$$2i\omega_3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial A_3}{\partial X_1} \right) = -3(2A_1 \bar{A}_1 + A_3 \bar{A}_3) A_3 - A_1^3 e^{-i\Gamma}. \quad (6.2.224)$$

Положив в уравнениях (6.2.223) и (6.2.224) $A_n = (1/2) a_n \exp(i\beta_n)$ с действительными a_n и β_n и отделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{\partial a_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial a_1}{\partial X_1} = -\frac{3}{8\omega_1} a_1^2 a_3 \sin \delta, \quad (6.2.225)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial \beta_1}{\partial X_1} = \frac{3}{8\omega_1} (a_1^2 + 2a_3^2 + a_1 a_3 \cos \delta), \quad (6.2.226)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial a_3}{\partial X_1} = \frac{1}{8\omega_3} a_1^3 \sin \delta, \quad (6.2.227)$$

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial \beta_3}{\partial X_1} = \frac{1}{8\omega_3} (6a_1^2 + 3a_3^2 + a_1^3 a_3^{-1} \cos \delta). \quad (6.2.228)$$

Здесь принято обозначение

$$\delta = \Gamma + \beta_3 - 3\beta_1. \quad (6.2.229)$$

Уравнения (6.2.225)–(6.2.228) вполне согласуются с уравнениями (5.8.24)–(5.8.27), полученными с помощью вариационного подхода.

6.2.10. Ограничения метода разложения производной

Этот метод применим только к задачам волнового типа. Он не применим при наличии неустойчивости, за исключением тех случаев, когда неустойчивость является слабой. Подобная неустойчивость имела место в нелинейной задаче устойчивости, рассмотренной в п. 6.2.8. При $k > 1$ величина u ограничена, и разложение (6.2.198) пригодно для времен порядка ϵ^{-2} , если только значения k далеки от 1. Если $k < 1$ и k далеко от 1, то это разложение пригодно только для малых времен. В окрестности $k = 1$ неустойчивость является слабой, и соотношение (6.2.211) задает решение, пригодное для времен порядка ϵ^{-1} .

В случае гиперболических уравнений этот метод может быть применен к диспергирующим волнам, если только начальные условия представляются суперпозицией конечного числа синусоид.

В волновых задачах, в которых в линейном приближении дисперсия отсутствует, как, например, в следующей задаче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon u^2, \quad (6.2.230)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (6.2.231)$$

этот метод не позволяет получить решение, если даже $f(x)$ — синусоидальная функция типа $\cos x$. Чтобы установить это, положим

$$u = u_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon u_1(x, T_0, T_1) + \dots, \quad (6.2.232)$$

где

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t.$$

Подставим (6.2.232) в (6.2.230) и (6.2.231) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим, приравнявая члены:

порядка ε^0

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad (6.2.233)$$

$$u_0(x, 0, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u_0}{\partial T_0}(x, 0, 0) = 0; \quad (6.2.234)$$

порядка ε

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0^2, \quad (6.2.235)$$

$$u(x, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial T_0}(x, 0, 0) = -\frac{\partial u_0}{\partial T_1}(x, 0, 0). \quad (6.2.236)$$

Решение задачи (6.2.233), (6.2.234) имеет вид

$$u_0 = A(T_1) e^{i(x-T_0)} + \bar{A}(T_1) e^{-i(x-T_0)}, \quad (6.2.237)$$

причем

$$A_0 = \frac{1}{2}.$$

Подставив это решение задачи для нулевого порядка в (6.2.235), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = & 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i(x-T_0)} - 2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-i(x-T_0)} + \\ & + 2A\bar{A} + A^2 e^{2i(x-T_0)} + \bar{A}^2 e^{-2i(x-T_0)}. \end{aligned} \quad (6.2.238)$$

Правая часть полученного уравнения содержит слагаемые, которые порождают вековые члены. Такими слагаемыми, кроме чле-

нов, содержащих $\exp[\pm i(x - T_0)]$, являются члены, пропорциональные $\exp[\pm 2i(x - T_0)]$. Для того чтобы отношение u_1/u_0 было ограничено при всех T_0 , названные слагаемые должны быть исключены. Однако нет способа, с помощью которого это можно сделать. В предыдущих примерах подобные слагаемые были пропорциональны $\exp[\pm i(x - T_0)]$, и коэффициент A выбирался так, чтобы исключить их. Если в рассматриваемом случае мы хотим получить нетривиальное решение, то коэффициент A можно выбрать таким образом, чтобы исключить слагаемые, пропорциональные $\exp[\pm i(x - T_0)]$. Получающееся при этом разложение содержит вековые члены и, следовательно, не является пригодным для больших времен.

Разложения для волн без дисперсии, пригодные при больших временах и начальных условиях общего вида, были получены в п. 3.2.4 и 3.2.5 с помощью метода координатных преобразований.

6.3. Процедура разложения по двум переменным

6.3.1. Уравнение Дюффинга

Вновь рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \epsilon u^3 = 0. \quad (6.3.1)$$

Будем предполагать, что существует разложение вида

$$u = u_0(\xi, \eta) + \epsilon u_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.3.2)$$

где

$$\xi = \epsilon t, \quad \eta = (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3 + \dots) t. \quad (6.3.3)$$

Подставив (6.3.2) и (6.3.3) в (6.3.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (6.3.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} - u_0^3, \quad (6.3.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_2 = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} - 3u_0^2 u_1. \quad (6.3.6)$$

Общее решение уравнения (6.3.4) имеет вид

$$u_0 = A_0(\xi) \cos \omega_0 \eta + B_0(\xi) \sin \omega_0 \eta. \quad (6.3.7)$$

С учетом его уравнение (6.3.5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_1 = & - \left[2\omega_0 B'_0 + \frac{3}{4} (A_0^3 + A_0 B_0^2) \right] \cos \omega_0 \eta + \\ & + \left[2\omega_0 A'_0 - \frac{3}{4} (B_0^3 + A_0^2 B_0) \right] \sin \omega_0 \eta - \\ & - \frac{1}{4} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \cos 3\omega_0 \eta + \\ & + \frac{1}{4} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \sin 3\omega_0 \eta. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Вековые члены будут исключены при условиях

$$2\omega_0 B'_0 + \frac{3}{4} (A_0^3 + A_0 B_0^2) = 0, \quad (6.3.9)$$

$$2\omega_0 A'_0 - \frac{3}{4} (B_0^3 + A_0^2 B_0) = 0. \quad (6.3.10)$$

Умножая (6.3.9) на B_0 , а (6.3.10) — на A_0 и складывая получающиеся уравнения, получаем

$$\frac{d}{d\xi} (A_0^2 + B_0^2) = 0, \quad \text{или} \quad A_0^2 + B_0^2 = a^2 = \text{const}. \quad (6.3.11)$$

Используя (6.3.11), можем записать уравнения (6.3.9) и (6.3.10) в виде

$$B'_0 + \omega_1 A_0 = 0, \quad A'_0 - \omega_1 B_0 = 0, \quad (6.3.12)$$

где

$$\omega_1 = \frac{3}{8\omega_0} a^2.$$

Таким образом,

$$A_0 = a \cos (\omega_1 \xi + \varphi), \quad B_0 = -a \sin (\omega_1 \xi + \varphi). \quad (6.3.13)$$

Здесь φ — постоянная. Решение для u_1 после исключения вековых членов будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_1 = & \tilde{A}_1(\xi) \cos \omega_0 \eta + \tilde{B}_1(\xi) \sin \omega_0 \eta + \\ & + \frac{1}{32\omega_0^2} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \cos 3\omega_0 \eta - \\ & - \frac{1}{32\omega_0^2} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \sin 3\omega_0 \eta. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Подставляя в u_0 и u_1 выражения для A_0 и B_0 , получаем

$$u_0 = a \cos \theta, \quad (6.3.15)$$

$$u_1 = A_1(\xi) \cos \theta + B_1(\xi) \sin \theta + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\theta, \quad (6.3.16)$$

где принято обозначение

$$\theta = \omega_0 \eta + \omega_1 \xi + \varphi. \quad (6.3.17)$$

Заменив u_0 и u_1 в уравнении (6.3.6) их выражениями (6.3.15) — (6.3.17), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_2 = & - \left(2\omega_0 B_1' + \frac{9}{4} a^2 A_1 - 2\omega_0 \omega_1 A_1 - a\omega_1^2 - 2a\omega_2 \omega_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{128\omega_0^2} a^5 \right) \cos \theta - \left(-2\omega_0 A_1' - 2\omega_0 \omega_1 B_1 + \frac{3}{4} a^2 B_1 \right) \sin \theta + NST. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Вековые члены будут исключены при условиях $A_1 = B_1 = 0$ и

$$2\omega_0^2 \omega_2 = -\omega_1^2 + \frac{3}{128\omega_0^2} a^4$$

или иначе

$$\omega_2 = -\frac{15}{256\omega_0^4} a^4. \quad (6.3.19)$$

Следовательно, во втором приближении получим

$$u = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega t + \varphi) + O(\varepsilon^2), \quad (6.3.20)$$

где

$$\omega = \frac{d}{dt}(\omega_0 \eta + \omega_1 \xi) = \frac{d}{dt}[(\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_0 \omega_2 + \dots) t],$$

или

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\varepsilon^2}{256\omega_0^3} a^4 + O(\varepsilon^3). \quad (6.3.21)$$

Это разложение вполне согласуется с разложениями, полученными в п. 3.1.1 с помощью метода Линдштедта—Пуанкаре, в п. 5.4.1—с помощью метода усреднения и в п. 6.2.1—с помощью метода разложения производной.

6.3.2. Осциллятор Ван-дер-Поля

Вторым примером, рассматриваемым в этом параграфе, будет осциллятор Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt}, \quad (6.3.22)$$

который изучался в п. 5.4.2, 5.7.4 и 6.2.2. Предположим, что функция u допускает следующее равномерно пригодное разложе-

ние Коул и Кеворкян [1963], Кеворкян [1966a]:

$$u = u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.3.23)$$

где переменные ξ и η определены в (6.3.3). Подставив (6.3.3) и (6.3.23) в (6.3.22) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + u_0 = 0, \quad (6.3.24)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial \eta}, \quad (6.3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + u_2 = & -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \\ & + (1 - u_0^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) - 2u_0 u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Общее решение уравнения (6.3.24) имеет вид

$$u_0 = A_0(\xi) \cos \eta + B_0(\xi) \sin \eta. \quad (6.3.27)$$

С его учетом уравнение (6.3.25) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = & \left[-2B'_0 + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) B_0 \right] \cos \eta + \\ & + \left[2A'_0 - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) A_0 \right] \sin \eta + \\ & + \frac{1}{4} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \sin 3\eta + \frac{1}{4} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \cos 3\eta. \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Для того чтобы вековые члены отсутствовали, необходимо выполнение следующих условий:

$$-2B'_0 + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) B_0 = 0, \quad (6.3.29)$$

$$2A'_0 - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) A_0 = 0. \quad (6.3.30)$$

Умножая уравнение (6.3.29) на B_0 , а уравнение (6.3.30) на A_0 и вычитая из второго первое, получаем

$$\rho' - \rho \left(1 - \frac{1}{4} \rho \right) = 0. \quad (6.3.31)$$

Здесь ρ — квадрат амплитуды решения нулевого порядка, т. е.

$$\rho = a^2 = A_0^2 + B_0^2. \quad (6.3.32)$$

Интегрируя уравнение (6.3.31) методом разделения переменных, получим равенство

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\xi}}, \quad (6.3.33)$$

в котором a_0 — начальная амплитуда. Выразив A_0 и B_0 через фазу φ и амплитуду a , получим

$$A_0 = a \cos \varphi, \quad B_0 = -a \sin \varphi. \quad (6.3.34)$$

Подставив эти выражения в одно из уравнений (6.3.29) или (6.3.20) и используя (6.3.31), получим

$$\varphi' = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const.} \quad (6.3.35)$$

Следовательно, u_0 может быть записано в виде

$$u_0 = a \cos(\eta + \varphi_0). \quad (6.3.36)$$

С учетом условий (6.3.29) и (6.3.30) решение уравнения (6.3.28) будет иметь вид

$$u_1 = A_1(\xi) \cos(\eta + \varphi_0) + B_1(\xi) \sin(\eta + \varphi_0) - \frac{a^3}{32} \sin 3(\eta + \varphi_0). \quad (6.3.37)$$

Подставив u_0 и u_1 в (6.3.26), придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \eta^2} + u_2 = & \left[-2B_1' + \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) B_1 - a'' + 2\omega_2 a + \left(1 - \frac{3}{4} a^2 \right) a' + \right. \\ & \left. + \frac{a^5}{128} \right] \cos(\eta + \varphi_0) + \left[2A_1' - \left(1 - \frac{3}{4} a^2 \right) A_1 \right] \sin(\eta + \varphi_0) + NST. \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

Для исключения вековых членов потребуем, чтобы

$$2B_1' - \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) B_1 = 2\omega_2 a - a'' + \left(1 - \frac{3}{4} a^2 \right) a' + \frac{a^5}{128}, \quad (6.3.39)$$

$$2A_1' - \left(1 - \frac{3}{4} a^2 \right) A_1 = 0. \quad (6.3.40)$$

С помощью (6.3.31) и (6.3.32) эти уравнения примут вид

$$2B_1' - \frac{2a'}{a} B_1 = 2a \left(\omega_2 + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{7}{16} a^2 - \frac{1}{4} \right) a', \quad (6.3.41)$$

$$A_1' - \left(\frac{3a'}{a} - 1 \right) A_1 = 0. \quad (6.3.42)$$

Решениями полученных уравнений являются функции

$$B_1 = a \left(\omega_2 + \frac{1}{16} \right) \xi - b_1 a + \frac{1}{8} a \ln a - \frac{7}{64} a^3, \quad (6.3.43)$$

$$A_1 = a_1 a^3 e^{-\xi}, \quad (6.3.44)$$

где a_1 и b_1 — постоянные. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\xi \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 2$. Поэтому отношение u_1/u_0 при $\xi \rightarrow \infty$ будет неограниченным, если только не выполнено условие

$$\omega_2 = -\frac{1}{16}. \quad (6.3.45)$$

Во втором приближении, следовательно, будем иметь

$$u = (a + \varepsilon a^3 a_1 e^{-\varepsilon t}) \cos \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] - \\ - \varepsilon \left\{ \left(\frac{7}{64} a^3 - \frac{1}{8} a \ln a + b_1 a \right) \sin \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{32} \sin 3 \left[\left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \right) t + \varphi_0 \right] \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (6.3.46)$$

где

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}}. \quad (6.3.47)$$

Отождествив a_0 с $\bar{a}_0 + \varepsilon \bar{a}_0^3 a_1$, заметим, что полученное разложение полностью согласуется с разложением (6.2.38), полученным с помощью метода разложения производной.

6.3.3. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел

Вновь рассмотрим задачу о параметрическом резонансе, которая была исследована в п. 6.2.6 с помощью метода разложения производной. Математическое описание задачи дается соотношениями (3.1.63) — (3.1.65). Чтобы с помощью процедуры разложения по двум переменным найти равномерно пригодное разложение в окрестности переходных кривых, следует воспользоваться масштабами времени, отличными от (6.3.3). Подходящими масштабами времени являются следующие:

$$\xi = (e + \omega_2 e^2 + \dots) t, \quad \eta = t. \quad (6.3.48)$$

Будем предполагать, что x и y допускают разложения вида

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.3.49)$$

$$y = y_0(\xi, \eta) + \varepsilon y_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 y_2(\xi, \eta) + \dots. \quad (6.3.50)$$

Алгебраические детали построения решения здесь не приводятся. Подробности, связанные с решением первого порядка, будут такими же, как в п. 6.2.6 при $\xi = T_1$ и $\eta = T_0$. Читателя, интересующегося деталями решения второго порядка, отсылаем к Олфренду и Рэнду [1969]. Их результаты полностью согласуются с результатами, полученными в п. 3.1.5 с помощью метода Уиттекера.

6.3.4. Ограничения рассматриваемой методики

Приведенные выше примеры показывают, что при подходящем выборе двух переменных результаты, полученные с помощью процедуры разложения по двум переменным, согласуются с результатами, полученными с помощью метода разложения производной. В некоторых случаях для получения равномерно пригодных разложений необходимо использовать более двух переменных. Такая ситуация имела место в задаче о движении спутника вокруг малой планеты в ограниченной задаче трех тел Экштейн, Ши и Кеворкян [1966a] и в задаче о движении искусственного спутника, период обращения которого соизмерим с периодом вращения планеты Ши и Экштейн [1968].

В случае гиперболических уравнений рассматриваемая методика, так же как и метод разложения производной, применима только к волновым задачам с диспергирующими волнами. В задачах, в которых дисперсия отсутствует, подобных задаче, рассмотренной в п. 6.2.10, этот метод не позволяет получать решения.

6.4. Обобщенный метод

6.4.1. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим следующую частную задачу второго порядка (Найфэ, [1964], [1965b]):

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad (6.4.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (6.4.2)$$

которая изучалась в п. 4.1.3 и 4.2.2 с помощью методов сращения асимптотических разложений и составных асимптотических разложений. Из рассмотрений п. 4.1.3 следует, что точка $x=0$ является источником неравномерности прямого разложения. Размеры области неравномерности определяются равенством $x = O(\epsilon)$. Для исследования этой задачи с помощью метода сращения асимптотических разложений рассматривалось внутреннее разложение, пригодное для $x = O(\epsilon)$ и использующее внутреннюю переменную $\eta = x/\epsilon$. Это внутреннее разложение сращивалось с внешним и затем строилось составное разложение, которое и являлось равномерно пригодным разложением.

Чтобы получить равномерно пригодное разложение с помощью обобщенной разновидности метода многих масштабов, введем в рассмотрение масштабы

$$\xi = x, \quad (6.4.3)$$

$$\eta = \frac{g_0(x)}{\epsilon} + g_1(x) + \epsilon g_2(x), \quad (6.4.4)$$

где функции g_n будут определены в процессе вычислений. Потребуем выполнения равенств $g_0(0) = g_i(0) = 0$. Тогда при $x \rightarrow 0$ будем иметь $g_0(x) \rightarrow x$, и, следовательно, η будет стремиться к внутренней переменной x/ε . Производные по переменной x преобразуются в соответствии с равенствами

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (6.4.5)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left[\frac{d\eta}{dx} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (6.4.6)$$

С помощью введенных переменных уравнение (6.4.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{g'_0}{\varepsilon} + g'_1 + \varepsilon g'_2 + \dots \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \varepsilon \left(\frac{g''_0}{\varepsilon} + g''_1 + \varepsilon g''_2 + \dots \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \\ & + 2\varepsilon \left(\frac{g'_0}{\varepsilon} + g'_1 + \varepsilon g'_2 + \dots \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \\ & + (2\xi + 1) \left[\left(\frac{g'_0}{\varepsilon} + g'_1 + \varepsilon g'_2 + \dots \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] + 2y = 0. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по аргументу. Отметим, что переменную x , встречающуюся в уравнении (6.4.1), мы заменили на ξ ; именно выражение $2x + 1$ записано в виде $2\xi + 1$. Кроме того, функции g_n и их производные выражены через переменную ξ . Предположим теперь, что решение уравнения (6.4.7) допускает равномерно пригодное асимптотическое представление вида

$$y = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n y_n(\xi, \eta) + O(\varepsilon^N), \quad (6.4.8)$$

в котором выполнено

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} < \infty \quad (6.4.9)$$

для всех $\xi = x$ и $\eta = \eta(x; \varepsilon)$, где x принимает значения из интересующей нас области. Последнее условие является математическим выражением того факта, что разложение (6.4.8) регулярно во всей рассматриваемой области.

Подставив (6.4.8) в уравнение (6.4.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие урав-

нения относительно y_0 , y_1 и y_2 :

$$\left[g'_0 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \right] g'_0 = 0, \quad (6.4.10)$$

$$\begin{aligned} \left[g'_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right] g'_0 + 2g'_0 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + \left[g''_0 + (2\xi + 1) g'_1 \right] \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + \\ + (2\xi + 1) \frac{\partial y_0}{\partial \xi} + 2y_0 + 2g'_0 g'_1 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} = 0, \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

$$\begin{aligned} \left[g'_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right] g'_0 + 2g'_0 g'_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + (g'^2_1 + 2g'_0 g'_2) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + \\ + [g''_0 + (2\xi + 1) g'_1] \frac{\partial y_1}{\partial \eta} + [g'_1 + (2\xi + 1) g'_2] \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + \\ + 2g'_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial \eta} + 2g'_1 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + 2y_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Поскольку при $x \rightarrow 0$ выполнено $g_0(x) \rightarrow x$, то $g'_0 \neq 0$. Поэтому решение уравнения (6.4.10) запишется в виде

$$y_0 = A_0(\xi) + B_0(\xi) e^{-\gamma(\xi)\eta}, \quad (6.4.13)$$

где принято обозначение

$$\gamma(\xi) = \frac{2\xi + 1}{g'_0}. \quad (6.4.14)$$

Уравнение (6.4.11) тогда примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) g'^2_0 = - \{ (2\xi + 1) A'_0 + 2A_0 \} - \{ g'_0 \gamma \gamma' B_0 \eta + \\ + [-2g'_0 (B_0 \gamma)' + (2\xi + 1) B'_0 + (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0] \} e^{-\gamma \eta}. \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Решением полученного уравнения является функция

$$\begin{aligned} y_1 = A_1(\xi) + B_1(\xi) e^{-\gamma \eta} - \frac{(2\xi + 1) A'_0 + 2A_0}{g'^2_0 \gamma} \eta + \\ + \frac{1}{g'^2_0} \left\{ \frac{1}{2} B_0 g'_0 \gamma' \eta^2 - \frac{1}{\gamma} [2g'_0 (B_0 \gamma)' - (2\xi + 1) B'_0 - \right. \\ \left. - (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0 - B_0 g'_0 \gamma'] \eta \right\} e^{-\gamma \eta}. \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Для того чтобы отношение y_1/y_0 было ограниченным при всех η , коэффициенты при η , $\eta e^{-\gamma \eta}$ и $\eta^2 e^{-\gamma \eta}$ должны обратиться в нуль, т. е. должно быть выполнено

$$(2\xi + 1) A'_0 + 2A_0 = 0, \quad (6.4.17)$$

$$B_0 \gamma' = 0, \quad (6.4.18)$$

$$2g'_0 (B_0 \gamma)' - (2\xi + 1) B'_0 - (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0 - B_0 g'_0 \gamma' = 0. \quad (6.4.19)$$

Общее решение уравнения (6.4.17) имеет вид

$$A_0 = \frac{a_0}{2\xi + 1}, \quad (6.4.20)$$

где a_0 — постоянная. Поскольку y , а следовательно, и y_0 удовлетворяют двум граничным условиям, то имеем $B_0 \neq 0$. Тогда из уравнения (6.4.18) получаем

$$\gamma' = 0. \quad (6.4.21)$$

Таким образом, γ — постоянная, которую без потери общности можно взять равной единице. Из соотношения (6.4.14) будем иметь

$$g_0 = \xi^2 + \xi. \quad (6.4.22)$$

Здесь использовано условие $g_0(0) = 0$, которое отражает то обстоятельство, что неравномерность имеет место в окрестности точки $\xi = 0$. Уравнение (6.4.19) запишется в виде

$$B'_0 - g'_1 B_0 = 0. \quad (6.4.23)$$

Решением этого уравнения является функция

$$B_0 = b_0 e^{g_1(\xi)}, \quad (6.4.24)$$

где b_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, в первом порядке имеем

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_0}{2\xi + 1} + b_0 e^{g_1(\xi)} e^{-[g_0(\xi)/\varepsilon] - g_1(\xi)} + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{a_0}{2\xi + 1} + b_0 e^{-[g_0(\xi)/\varepsilon]} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

Поскольку функция $g_1(\xi)$ независимо от ее значений не входит в полученное разложение, то без потери общности можно положить $g_1 = 0$.

Проведенные выше рассмотрения показали, что величина γ должна быть постоянной. Не теряя общности, мы положили ее равной единице. В показателе экспоненты (см. (6.4.13)) величина γ умножается на η . Поэтому при не постоянном γ производная по ξ будет содержать члены, пропорциональные степеням η , из-за которых отношение y_1/y_0 будет неограниченным при $\eta \rightarrow \infty$. Следовательно, в подобной ситуации можно с самого начала положить γ равным единице. Кроме того, чтобы получить условие ограниченности y_1/y_0 для всех η , нет необходимости решать уравнение (6.4.15). Для этого достаточно, исследовав уравнение (6.4.15), потребовать обращения в нуль тех членов, которые порождают частные решения, дающие неограниченное отношение y_1/y_0 . К членам указанного типа относятся все члены, пропорциональные

решениям однородного уравнения. Поскольку решениями однородного уравнения являются $e^{-\gamma\eta}$ и 1, мы и потребовали выполнения условий (6.4.17) и (6.4.19).

Для отыскания второго приближения положим $g_1 = 0$, $\gamma = 1$ и, подставив выражения для y_0 , y_1 и g_0 в (6.4.12), получим

$$\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta^2} + y_2\right) g_0'^2 = -[(2\xi + 1)A_1' + 2A_1 + A_0''] + g_0'[B_1' - B_0 g_2'] e^{-\eta}. \quad (6.4.26)$$

Для ограниченности y_2/y_0 при всех η необходимо выполнение условий

$$(2\xi + 1)A_1' + 2A_1 + A_0'' = 0, \quad (6.4.27)$$

$$B_1' - B_0 g_2' = 0. \quad (6.4.28)$$

С учетом (6.4.20) получим следующее решение уравнения (6.4.27):

$$A_1 = \frac{a_1}{2\xi + 1} + \frac{2a_0}{(2\xi + 1)^3}, \quad (6.4.29)$$

где a_1 — постоянная интегрирования. Условию (6.4.28) можно удовлетворить, положив

$$B_1' = 0, \quad g_2' = 0. \quad (6.4.30)$$

Тогда будем иметь

$$B_1 = b_1, \quad g_2 = \text{const}, \quad (6.4.31)$$

где b_1 — постоянная интегрирования, а $g_2 \equiv 0$, поскольку $g_2(0) = 0$.

Таким образом, во втором приближении y задается равенством

$$y = \frac{a_0}{1 + 2x} + b_0 e^{-[(x^2 + x)/\varepsilon]} + \varepsilon \left[\frac{a_1}{1 + 2x} + \frac{2a_0}{(1 + 2x)^3} + b_1 e^{-[(x^2 + x)/\varepsilon]} \right] + O(\varepsilon^2). \quad (6.4.32)$$

Наложив граничные условия $y(0) = \alpha$ и $y(1) = \beta$, получим $a_0 = 3\beta$, $b_0 = \alpha - 3\beta$, $a_1 = -2\beta/3$, $b_1 = -16\beta/3$. Соотношение (6.4.32) запишется в виде

$$y = \frac{3\beta}{1 + 2x} + (\alpha - 3\beta) e^{-[(x^2 + x)/\varepsilon]} - \varepsilon \left[\frac{2\beta}{3(1 + 2x)} - \frac{6\beta}{(1 + 2x)^3} + \frac{16}{3}\beta e^{-[(x^2 + x)/\varepsilon]} \right] + O(\varepsilon^2). \quad (6.4.33)$$

Разложив $e^{-(x^2/\varepsilon)}$ при малом x^2/ε , заметим, что разложение (6.4.33) согласуется с разложением (4.2.50), полученным с помощью метода составных разложений. Таким образом, в отличие от метода

сращивания асимптотических разложений, в котором строятся два разложения, подлежащих сращиванию, метод многих масштабов задает единственное равномерно пригодное разложение.

6.4.2. Общее уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

В качестве второго примера рассмотрим задачу (Кокран [1962], Найфэ [1964], [1965b])

$$\varepsilon y'' + a(x) y' + b(x) y = c(x), \quad (6.4.34)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (6.4.35)$$

где на интервале $[0, 1]$ выполнено $a(x) > 0$. Случай, когда $a(x)$ обращается в нуль внутри интервала $[0, 1]$, называется задачей с точкой ветвления. Задачи с точкой ветвления кратко рассмотрены в п. 6.4.4 и подробно — в п. 7.3.1—7.3.9. При $c=0$ данный пример переходит в пример, рассмотренный в п. 4.1.3 с помощью метода сращивания асимптотических разложений.

Поскольку имеем $a(x) > 0$, то неравномерность имеет место в окрестности точки $x=0$. В п. 4.1.3 мы ввели в рассмотрение внутреннюю переменную x/ε и определили разложение, пригодное в области $x=O(\varepsilon)$, которое затем было сращено с внешним разложением. Чтобы найти равномерно пригодное первое приближение с помощью метода многих масштабов, предположим, что y допускает асимптотическое разложение вида

$$y = y_0(\xi, \eta) + \varepsilon y_1(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.4.36)$$

где

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{g(x)}{\varepsilon}, \quad g(x) \rightarrow x \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (6.4.37)$$

Подставив (6.4.36) и (6.4.37) в уравнение (6.4.34) и приравняв нулю коэффициенты при ε^0 и ε^1 , получим

$$\left[g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + a(\xi) \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \right] g' = 0, \quad (6.4.38)$$

$$\left[g' \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + a(\xi) \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right] g' + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta \partial \xi} + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + a(\xi) \frac{\partial y_0}{\partial \xi} + b(\xi) y_0 = c(\xi). \quad (6.4.39)$$

Функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $g(x)$ выражены здесь через переменную ξ .

Поскольку $g \neq 0$, то общее решение уравнения (6.4.38) имеет вид

$$y_0 = A(\xi) + B(\xi) e^{-\gamma(\xi) \eta}, \quad (6.4.40)$$

где

$$\gamma = \frac{a(\xi)}{g'}. \quad (6.4.41)$$

Из рассмотрений предыдущего пункта следует, что γ должна быть постоянной; в противном случае производные по ξ порождают в (6.4.39) члены, пропорциональные $\gamma'\eta$, и как следствие, отношение y_1/y_0 становится неограниченным при $\eta \rightarrow \infty$. Для равномерно пригодного разложения без потери общности можно положить $\gamma = 1$. Тогда, учитывая, что при $x \rightarrow 0$ выполнено $g(x) \rightarrow x$, получим

$$g = \int_0^x a(t) dt. \quad (6.4.42)$$

Подстановка y_0 в (6.4.39) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) g'^2 = -[aA' + bA - c] + [g'B' + (g'' - b)B] e^{-\eta}. \quad (6.4.43)$$

Чтобы отношение y_1/y_0 было ограниченным при всех η , потребуем выполнения условий

$$aA' + bA = c, \quad (6.4.44)$$

$$g'B' + (g'' - b)B = 0. \quad (6.4.45)$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$A = e^{-\int_1^x [b(t)/a(t)] dt} \left[a_0 + \int_1^x \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right], \quad (6.4.46)$$

$$B = \frac{b_0}{a(x)} e^{\int_0^x [b(t)/a(t)] dt}, \quad (6.4.47)$$

где a_0, b_0 — постоянные интегрирования.

В первом приближении y задается равенством

$$y = e^{-\int_1^x [b(t)/a(t)] dt} \left[a_0 + \int_1^x \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right] + \\ + \frac{b_0}{a(x)} e^{\int_0^x [b(t)/a(t)] dt} e^{-\varepsilon^{-1} \int_0^x a(t) dt} + O(\varepsilon). \quad (6.4.48)$$

Пределы интегрирования в (6.4.46) и (6.4.47) выбраны так, чтобы постоянные a_0 и b_0 просто выражались через параметры граничных

условий (6.4.35). Так, $a_0 = \beta$, а

$$b_0 = a(0) \left\{ \alpha - e^{-\int_1^0 [b(t)/a(t)] dt} \left[\beta + \int_1^0 \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right] \right\}. \quad (6.4.49)$$

Разложение (6.4.48) представляет собой составное разложение, которое согласуется с внутренним и внешним разложениями, полученными в п. 4.1.3 для внутренней и внешней областей соответственно. Записав формулу (6.4.48) для частного случая

$$a(x) = 1 + 2x, \quad b(x) = 2, \quad c(x) = 0, \quad (6.4.50)$$

рассмотренного в предыдущем пункте, получим

$$y = \frac{3\beta}{1+2x} + (\alpha - 3\beta) e^{-[(x^2+x)/\varepsilon]} + O(\varepsilon). \quad (6.4.51)$$

Здесь учтены равенство $a_0 = \beta$ и соотношение (6.4.49). Полученное разложение вполне согласуется с первым членом разложения, выведенного в предыдущем пункте.

6.4.3. Линейный осциллятор с медленно меняющейся восстанавливающей силой

Оба рассмотренных выше примера могли быть исследованы как с помощью метода многих масштабов, так и с помощью метода сращивания асимптотических разложений. Ниже рассмотрим пример, который не поддается исследованию с помощью последнего из указанных методов; именно, рассмотрим уравнение

$$y'' + b(\varepsilon x) y = 0, \quad (6.4.52)$$

в котором $b(\varepsilon x) \neq 0$ и ε — малый параметр. Чтобы получить разложение, равномерно пригодное для больших x , предположим, что y допускает асимптотическое разложение вида

$$y = y_0(\xi, \eta) + \varepsilon y_1(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.4.53)$$

где

$$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \frac{g(\xi)}{\varepsilon} + \dots \quad (6.4.54)$$

Такой выбор масштаба η обусловлен тем, что частота колебаний будет удовлетворять условию: $\omega = (d\eta/dx) = g'(\xi) = O(1)$. Подставив (6.4.53) и (6.4.54) в уравнение (6.4.52) и приравняв нулю

коэффициенты при ε^0 и ε , получим

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + b(\xi) y_0 = 0, \quad (6.4.55)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + b(\xi) y_1 + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (6.4.56)$$

Общее решение уравнения (6.4.55) имеет вид

$$y_0 = A(\xi) e^{i\gamma\eta} + B(\xi) e^{-i\gamma\eta}, \quad (6.4.57)$$

где

$$\gamma^2 = \frac{b(\xi)}{g'^2(\xi)}. \quad (6.4.58)$$

В предыдущих двух пунктах было показано, что для получения разложения с ограниченным при всех η отношением y_1/y_0 следует положить $\gamma = 1$. Таким образом,

$$g = \int_0^\xi \sqrt{b(t)} dt. \quad (6.4.59)$$

Подставив y_0 в (6.4.56) и помня, что $\gamma = 1$, получим

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + y_1 \right) g'^2 = -i(g''A + 2g'A') e^{i\eta} + i(g''B + 2g'B') e^{-i\eta}. \quad (6.4.60)$$

Для ограниченности y_1/y_0 при всех η потребуем обращения в нуль коэффициентов при $\exp(\pm i\eta)$ в правой части (6.4.60):

$$g''A + 2g'A' = 0, \quad (6.4.61)$$

$$g''B + 2g'B' = 0. \quad (6.4.62)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$A = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{g'}}, \quad B = \frac{\tilde{b}_0}{\sqrt{g'}}, \quad (6.4.63)$$

где \tilde{a}_0 и \tilde{b}_0 — постоянные интегрирования.

При $b(\varepsilon x) > 0$ имеем для y

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{b(\varepsilon x)}} \left[a_0 \cos \left(\varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon x} \sqrt{b(t)} dt \right) + b_0 \sin \left(\varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon x} \sqrt{b(t)} dt \right) \right] + O(\varepsilon), \quad (6.4.64)$$

где a_0 и b_0 — постоянные. При $b(\varepsilon x) < 0$ имеем

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{|b(\varepsilon x)|}} \left[a_0 \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon x} \sqrt{-b(t)} dt \right) + \right. \\ \left. + b_0 \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon x} \sqrt{-b(t)} dt \right) \right] + O(\varepsilon). \quad (6.4.65)$$

Разложения (6.4.64) и (6.4.65) называются ВКБ-приближениями к решению уравнения (6.4.52) (см. п. 7.1.3).

Очевидно, что эти разложения непригодны в окрестности точки, в которой функция $b(\epsilon x)$ обращается в нуль. В самом деле, при стремлении x к нулю функции $b(\epsilon x)$ полученные разложения стремятся к бесконечности. Нули функции $b(\epsilon x)$ называются точками возврата и подробно рассмотрены в п. 7.3.1—7.3.9. Один пример с точкой возврата исследован в следующем пункте с помощью метода многих масштабов.

Замена переменной x на переменную ξ в уравнении (6.4.52) дает

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \lambda^2 b(\xi) y = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\epsilon}. \quad (6.4.66)$$

Полученная задача содержит большой параметр λ . Таким образом, приближение, построенное выше, применимо также и к этой задаче.

6.4.4. Пример с точкой возврата

Рассмотрим задачу

$$y'' + \lambda^2 (1-x) f(x) y = 0, \quad (6.4.67)$$

где λ — большое положительное число, $f(x)$ — регулярная положительная функция. Положив в (6.4.64) и (6.4.65) $b(\epsilon t) = (1-x)f(x)$ и $\epsilon = \lambda^{-1}$, можно увидеть, что при $x \rightarrow 1$ ВКБ-приближение стремится к бесконечности. Чтобы построить всюду пригодное разложение с помощью метода многих масштабов, определим сначала степень неравномерности. Перейдя с этой целью в уравнении (6.4.67) к переменной $\zeta = (1-x)\lambda^v$, $v > 0$, получим

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \lambda^{2-3v} f(1-\zeta\lambda^{-v}) \zeta y = 0. \quad (6.4.68)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ получим следующие предельные уравнения в зависимости от значения v :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} &= 0 & \text{при } v > \frac{2}{3}, \\ y &= 0 & \text{при } v < \frac{2}{3}, \\ \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + f(1) \zeta y &= 0 & \text{при } v = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (6.4.69)$$

Подходящим является последнее уравнение, поскольку его решение имеет экспоненциальный характер при $\zeta < 0$ (т. е. при $x > 1$) и колебательный характер при $\zeta > 0$ (т. е. при $x < 1$).

Таким образом, оно может быть использовано для соединения решений (6.4.64) и (6.4.65) при прохождении через точку возврата.

Итак, предположим, что решение уравнения (6.4.67) допускает асимптотическое представление вида (Кокран [1962]; Найфэ [1964], [1965b]; Фаукес [1968, часть I])

$$y = y_0(\xi, \eta) + \lambda^{-2/3} y_1(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.4.70)$$

где

$$\xi = x, \quad \eta = \lambda^{2/3} g(x) + \dots, \quad (6.4.71)$$

$$g(x) = (1-x)h(x), \quad h(x) > 0. \quad (6.4.72)$$

Функции независимой переменной x , встречающиеся в (6.4.67), отнесены к переменной ξ . Исключение составляет выражение $1-x$, которое обуславливает неравномерность; оно заменено на $\eta \lambda^{-2/3} h(x)$. С учетом сказанного уравнения (6.4.67) примет вид

$$\lambda^{4/3} g'^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + 2\lambda^{2/3} g' \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^{2/3} g'' \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \lambda^{4/3} \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y = 0. \quad (6.4.73)$$

Подставив (6.4.70) в (6.4.73) и приравняв нулю коэффициенты при $\lambda^{4/3}$ и $\lambda^{2/3}$, получим

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y_0 = 0, \quad (6.4.74)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y_1 + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} = 0. \quad (6.4.75)$$

Общее решение уравнения (6.4.74) имеет вид

$$y_0 = A(\xi) \eta^{1/2} J_{1/3}[\gamma(\xi) \eta^{3/2}] + B(\xi) \eta^{1/2} J_{-1/3}[\gamma(\xi) \eta^{3/2}], \quad (6.4.76)$$

где $J_{\pm 1/3}$ — функции Бесселя порядка $\pm 1/3$, а

$$\gamma = \pm \frac{2}{3} \left[\frac{f(\xi)}{h(\xi) g'^2(\xi)} \right]^{1/2}. \quad (6.4.77)$$

Из рассмотрений п. 6.4.1 и 6.4.2 следует, что для ограниченности отношения y_1/y_0 при всех η следует положить $\gamma = 1$. Имеем поэтому

$$g'(\xi) h^{1/2}(\xi) = -\frac{2}{3} [f(\xi)]^{1/2}. \quad (6.4.78)$$

При этом знак минус в (6.4.77) выбран для того, чтобы выполнялось $h(x) > 0$. Помножив обе части уравнения (6.4.78) на $(1-\xi)^{1/2}$, получим

$$g^{1/2} g' = -\frac{2}{3} [(1-\xi) f(\xi)]^{1/2}.$$

Поскольку $g(1) = 0$, имеем

$$g^{3/2} = - \int_1^x [(1-t)f(t)]^{1/2} dt. \quad (6.4.79)$$

При известном y_0 и $\gamma = 1$ уравнение (6.4.75) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{9}{4} \eta y_1 \right) g'^2 = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \eta} [(2g'A' + g''A) \eta^{1/2} J_{1/3}(\eta^{3/2}) + (2g'B' + g''B) \eta^{1/2} J_{-1/3}(\eta^{3/2})]. \end{aligned} \quad (6.4.80)$$

Чтобы отношение y_1/y_0 было ограниченным для всех η , правая часть уравнения (6.4.80) должна обратиться в нуль, т. е. должно быть выполнено

$$\begin{aligned} 2g'A' + g''A &= 0, \\ 2g'B' + g''B &= 0. \end{aligned} \quad (6.4.81)$$

Следовательно,

$$A = \frac{a}{\sqrt{g'}}, \quad B = \frac{b}{\sqrt{g'}}, \quad (6.4.82)$$

где a, b — постоянные интегрирования.

Таким образом, в первом приближении имеем

$$y = \frac{g^{3/4}(x)}{[(1-x)f(x)]^{1/4}} [a_0 J_{1/3}(\lambda g^{3/2}) + b_0 J_{-1/3}(\lambda g^{3/2})] + \dots, \quad (6.4.83a)$$

где a_0 и b_0 — постоянные. При $x \rightarrow 1$ имеем

$$g(x) \rightarrow \left[\frac{4}{9} f(1) \right]^{1/3} (1-x)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} y \rightarrow (1-x)^{1/2} \left\{ \tilde{a}_0 J_{1/3} \left[\frac{2}{3} \lambda \sqrt{f(1)} (1-x)^{3/2} \right] + \right. \\ \left. + \tilde{b}_0 J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} \lambda \sqrt{f(1)} (1-x)^{3/2} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.4.83b)$$

Здесь \tilde{a}_0 и \tilde{b}_0 — постоянные. Поскольку при $t \rightarrow 0$ имеем

$$J_\nu(t) = t^\nu + O(t^\nu),$$

то решение (6.4.83b) будет ограниченным при $x \rightarrow 1$.

6.4.5. Уравнение Дюффинга с медленно меняющимися коэффициентами

Ниже рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha(\xi) u + \beta(\xi) u^3 = 0, \quad (6.4.84)$$

где принято

$$\xi = \varepsilon t, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Кузмак [1959] изучал асимптотические решения этого уравнения с помощью метода многих масштабов.

Если α и β — постоянные, то решение уравнения (6.4.84) выражается в эллиптических функциях Якоби, т. е. представляется в одном из видов:

$$u = A \operatorname{sn}(Kt, v), \quad A \operatorname{cn}(Kt, v), \quad A \operatorname{dn}(Kt, v). \quad (6.4.85)$$

Здесь v — модуль, $K(v)$ — полный эллиптический интеграл. Приведенные функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left[\frac{d \operatorname{sn}}{d\tau} \right]^2 = (1 - \operatorname{sn}^2)(1 - v^2 \operatorname{sn}^2), \quad (6.4.86a)$$

$$\left[\frac{d \operatorname{cn}}{d\tau} \right]^2 = (1 - \operatorname{cn}^2)(1 - v^2 + v^2 \operatorname{cn}^2), \quad (6.4.86b)$$

$$\left[\frac{d \operatorname{dn}}{d\tau} \right]^2 = (1 - \operatorname{dn}^2)(v^2 - 1 + \operatorname{dn}^2), \quad (6.4.86b)$$

где $\tau = Kt$. Дифференцируя обе части в (6.4.86), получим

$$\frac{d^2 \operatorname{sn}}{d\tau^2} + (1 + v^2) \operatorname{sn} - 2v^2 \operatorname{sn}^3 = 0, \quad (6.4.87a)$$

$$\frac{d^2 \operatorname{cn}}{d\tau^2} + (1 - 2v^2) \operatorname{cn} + 2v^2 \operatorname{cn}^3 = 0, \quad (6.4.87b)$$

$$\frac{d^2 \operatorname{dn}}{d\tau^2} + (v^2 - 2) \operatorname{dn} + 2 \operatorname{dn}^3 = 0. \quad (6.4.87b)$$

Поскольку рассматриваемые эллиптические функции затабулированы для значений $0 < v < 1$, выразим решение через одну из этих табулированных функций.

Если α и β — не постоянные, а медленно меняющиеся функции, то будем предполагать, что решение зависит как от медленного масштаба времени $\xi = \varepsilon t$, так и от быстрого масштаба времени t . Кроме того, в первом приближении решение может быть выражено в виде (6.4.85), где $A = A(\xi)$, $K = K(\xi)$ и $v = v(\xi)$. Таким образом, в случае медленно меняющихся коэффициентов будем полагать

$$u = u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \dots, \quad (6.4.88)$$

где

$$\eta = \frac{g(\xi)}{\varepsilon} + \dots \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{dt} = g'(\xi) + \dots$$

Решение этого вида отличается от решения, построенного Куз-маком, в котором предполагалось $\eta = g'(\xi)t$. Подставив (6.4.88) в (6.4.84) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$g'^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi) u_0 + \beta(\xi) u_0^3 = 0, \quad (6.4.89)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi) u_1 + 3\beta(\xi) u_0^2 u_1 = -2g' \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} - g'' \frac{\partial u_0}{\partial \eta}. \quad (6.4.90)$$

В качестве решения уравнения (6.4.89) возьмем одну из эллиптических функций (6.4.85), скажем, sn . Таким образом,

$$u_0 = A(\xi) \text{sn}[\eta, v(\xi)]. \quad (6.4.91)$$

Следовательно, отношение u_0/A должно удовлетворять уравнению (6.4.87а) при $\eta = \tau$, т. е.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + [1 + v^2(\xi)] u_0 - \frac{2v^2(\xi)}{A^2(\xi)} u_0^3 = 0. \quad (6.4.92)$$

Для того чтобы уравнения (6.4.89) и (6.4.92) совпадали, должно быть выполнено

$$[1 + v^2(\xi)] g'^2(\xi) = \alpha(\xi), \quad (6.4.93)$$

$$2v^2(\xi) g'^2(\xi) = -\beta(\xi) A^2(\xi). \quad (6.4.94)$$

Эти равенства представляют собой два соотношения между величинами $A(\xi)$, $v(\xi)$ и $g(\xi)$. Третье соотношение определяется из условия ограниченности отношения u_1/u_0 при всех η , которое необходимо для того, чтобы (6.4.88) было равномерно пригодным асимптотическим разложением.

Дифференцируя (6.4.89) по η , получим однородную часть уравнения (6.4.90). Следовательно, $\partial u_0 / \partial \eta$ является решением однородной части уравнения (6.4.90). Чтобы отношение u_1/u_0 было ограниченным при всех η , неоднородная часть в (6.4.90) должна быть ортогональной решению однородной части, т. е. должно быть выполнено

$$\int_{\eta_1}^{\eta_1 + T} \left[2g' \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + g'' \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right] \frac{\partial u_0}{\partial \eta} d\eta = 0, \quad (6.4.95)$$

причем $\text{sn}(\eta_1, v) = 0$, а T — период функции $\text{sn}(\eta, v)$ по переменной η . Это условие является обобщением условия исключения слагаемых, порождающих вековые члены. Уравнение (6.4.95)

можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left[g'(\xi) \int_{\eta_1}^{\eta_1+T} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] = 0,$$

откуда имеем

$$g'(\xi) \int_{\eta_1}^{\eta_1+T} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = \text{const.} \quad (6.4.96)$$

Поскольку $u_0 = A \operatorname{sn}(\eta, v)$, то η_1 можно положить равным нулю, а $T = 4K$, где K — следующий полный эллиптический интеграл второго рода

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x^2)(1-v^2x^2)]^{1/2}}. \quad (6.4.97)$$

Подставляя в (6.4.96) выражение для u_0 из (6.4.91), получим

$$g'(\xi) A^2(\xi) L[v^2(\xi)] = c, \quad (6.4.98)$$

где c — постоянная, а

$$L = \int_0^K \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = \int_0^K \frac{\partial \xi}{d\eta} d\xi, \quad (6.4.99)$$

причем $\xi = \operatorname{sn}(\eta, v)$. Используя (6.4.86а), можно выразить L в виде

$$L = \int_0^1 \sqrt{(1-\xi^2)(1-v^2\xi^2)} d\xi,$$

или

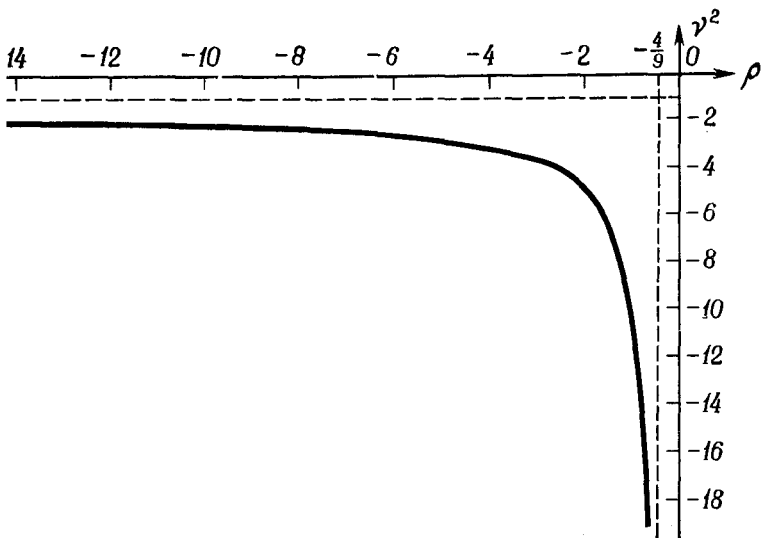
$$L = \frac{(1+v^2)E(v) - (1-v^2)K(v)}{3v^2}. \quad (6.4.100)$$

Здесь $E(v)$ — следующий полный эллиптический интеграл первого рода

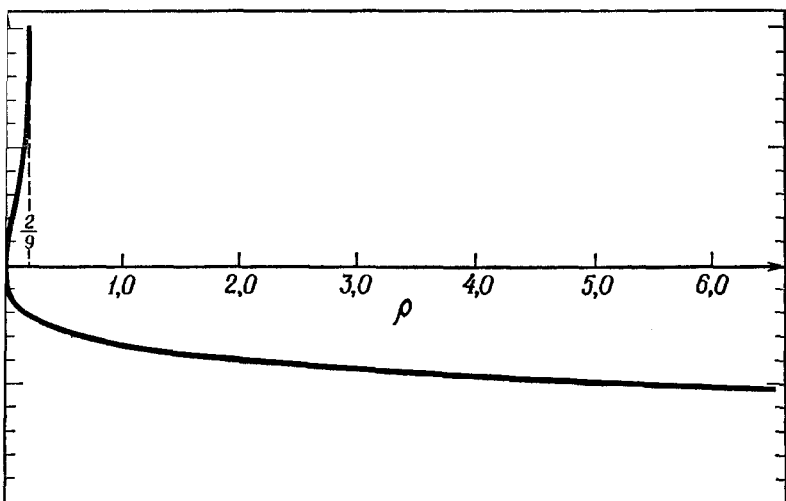
$$E(v) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-v^2x^2}{1-x^2}} dx. \quad (6.4.101)$$

Условия (6.4.93), (6.4.94) и (6.4.98) дают три соотношения для определения $A(\xi)$, $v(\xi)$ и $g'(\xi)$. Разрешая (6.4.93) относительно g' , получим

$$g'(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha(\xi)}{1+v^2(\xi)}}. \quad (6.4.102)$$



a



б

Рис. 6.2.

Исключая g' из (6.4.93) (6.4.94) и разрешая относительно A , получаем

$$A(\xi) = \sqrt{-\frac{2\alpha(\xi)v^2(\xi)}{\beta(\xi)[1+v^2(\xi)]}}. \quad (6.4.103)$$

Возведя (6.4.98) в квадрат и подставив значения g' и A из (6.4.102) и (6.4.103), получим

$$\frac{4v^4(\xi)L^2[v(\xi)]}{[1+v^2(\xi)]^3} = \rho(\xi) = \frac{c^2\beta^2(\xi)}{\alpha^3(\xi)}. \quad (6.4.104)$$

Используя последние три соотношения, можем вычислить сначала $v(\xi)$ из (6.4.104) и затем g' и A из соотношений (6.4.102) и (6.4.103). График решения уравнения (6.4.104) был построен Кузмаком и приведен на рис. 6.2.

В зависимости от знаков $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ имеют место три различных случая:

(1) $\alpha(\xi) > 0$, $\beta(\xi) < 0$. В этом случае имеем $\rho > 0$, а из уравнения (6.4.94) видно, что $\gamma = v^2(\xi) > 0$. Следовательно, кривая, соответствующая γ , лежит в первом квадранте. Решение для γ существует при условии $0 < \rho < 2/9$. В точке ξ_c , удовлетворяющей условию $\rho(\xi_c) = 2/9$, асимптотическое решение теряет свой колебательный характер. При условии $\rho > 2/9$ или $\alpha(\xi) < 0$ и $\beta(\xi) < 0$ уравнение (6.4.89) периодических решений не имеет.

(2) $\alpha(\xi) > 0$, $\beta(\xi) > 0$. В этом случае имеем $\rho > 0$, а из (6.4.94) следует, что $\gamma < 0$. Следовательно, кривая, соответствующая γ , лежит в четвертом квадранте. Решение для γ существует при $0 < \rho < \infty$.

(3) $\alpha(\xi) < 0$, $\beta(\xi) > 0$. В этом случае имеем $\rho < 0$, а из (6.4.94) следует, что $\gamma < 0$. Следовательно, кривая, соответствующая γ , лежит в третьем квадранте. Решение для γ существует при $-\infty < \rho < -4/9$.

Поскольку эллиптические функции и интегралы обычно затабулированы для действительных значений v на интервале $0 < v < 1$, то в случаях (2) и (3) предпочтительнее выразить колебательные решения через функции $\operatorname{sn}(\eta, v)$ и $\operatorname{dn}(\eta, v)$.

6.4.6. Динамика входа

Движение тела с переменным вращением вокруг собственной оси, подверженного при входе в атмосферу действию нелинейных аэродинамических сил, имеющего малое смещение центра тяжести и аэродинамическую асимметрию, описывается уравне-

ниями (Найфэ и Сарик [1972a])

$$\ddot{\xi} - i \frac{I_x}{I} p \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon K e^{i(\Psi + \Phi_0)} + \gamma |\xi|^2 \xi + \varepsilon^2 \mu_1 \xi + \mu_2 |\xi|^2 \dot{\xi} + i \varepsilon^2 \chi_1 \xi + i \chi_2 |\xi|^2 \dot{\xi}, \quad (6.4.105)$$

$$\dot{\varphi} = p, \quad (6.4.106)$$

$$\dot{p} = \varepsilon^2 v_0 + \varepsilon v_1 \tilde{\alpha} + \varepsilon^2 v_2 p, \quad \tilde{\alpha} = \text{Im} \{ \xi e^{-i\varphi} \}. \quad (6.4.107)$$

Здесь $\xi = \beta + i\alpha$, $|\xi|$ — синус полного угла атаки, p — угловая скорость вращения, εK — амплитуда возбуждения с помощью аэродинамической асимметрии, ε — малая, но конечная величина, имеющая порядок синуса начального полного угла атаки. Величины ω_0 , K , γ , μ_i , χ_i и v_i являются медленно меняющимися функциями времени, I и I_x — постоянные.

При отсутствии затухания и нелинейных членов (т. е. при $\gamma = \mu_i = \chi_i = 0$) решение уравнения (6.4.105) для постоянных p , K и ω_0 имеет вид

$$\xi = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + \frac{\varepsilon K}{(\omega_1 - p)(p - \omega_2)} e^{i(\Psi + \Phi_0)}, \quad (6.4.108)$$

где A_1 и A_2 — комплексные постоянные и

$$\omega_{1,2} = \frac{p I_x}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{p I_x}{2I} \right)^2 + \omega_0^2}. \quad (6.4.109)$$

Частоты ω_1 и ω_2 называются частотами нутации и прецессии. Для статически устойчивых тел (т. е. при $\omega_0^2 > 0$) и положительных p частота ω_1 положительна, а ω_2 отрицательна. В зависимости от того, близко ли значение p к ω_1 или нет, следует различать два случая. Первый случай, при котором вынужденный отклик стремится к бесконечности при $p \rightarrow \omega_1$, называется вращательным резонансом. До того как значения p приблизятся к ω_1 , затухание и нелинейные аэродинамические силы существенно изменят отклик системы. Случай вращательного резонанса рассмотрен в данном пункте для $K = \varepsilon^2 k$. Читателя, интересующегося нерезонансным случаем, отсылаем к Найфэ и Сарик [1972a].

Для нахождения приближенного решения уравнений (6.4.105) — (6.4.107) при $p \approx \omega_1$ будем использовать обобщенную разновидность метода многих масштабов. Заметим с этой целью, что экспериментальные данные о фактических полетах и численные расчеты движения тел с шестью степенями свободы выявляют существование по крайней мере четырех масштабов времени: медленного масштаба времени $T_2 = \varepsilon^2 t$, характеризующего изменение величин K , ω_0 , γ , v_i , χ_i и μ_i , и трех быстрых масштабов, характеризующих нутацию, прецессию и вынужденную состав-

ляющую угла атаки. Итак, будем предполагать разложения вида

$$\xi(t; \varepsilon) = \varepsilon \xi_1(\eta_1, \eta_2, T_2) + \varepsilon^2 \xi_2(\eta_1, \eta_2, \varphi, T_2) + \dots \quad (6.4.110)$$

$$p(t; \varepsilon) = p_0(T_2) + \varepsilon^2 p_2(\eta_1, \eta_2, \varphi, T_2) + \dots, \quad (6.4.111)$$

где

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \omega_i, \quad \omega_{1,2} = \frac{p_0 I_x}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0 I_x}{2I}\right)^2 + \omega_0^2}. \quad (6.4.112)$$

здесь $\omega_1(T_2)$ — частота нутации, $\omega_2(T_2)$ — частота прецессии. Производные по времени в этих переменных преобразуются согласно равенствам

$$\frac{d}{dt} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}, \quad (6.4.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} = & \omega_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + p^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2\omega_1 \omega_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + 2\omega_1 p \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \varphi} + \\ & + 2\omega_2 p \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \varphi} + \omega_1 \frac{\partial p}{\partial \eta_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_2 \frac{\partial p}{\partial \eta_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + p \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\ & + 2\varepsilon^2 \omega_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial T_2} + 2\varepsilon^2 \omega_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial T_2} + 2\varepsilon^2 p \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial T_2} + \varepsilon^2 \omega_1' \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \\ & + \varepsilon^2 \omega_2' \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial T_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial T_2^2}. \end{aligned} \quad (6.4.114)$$

Подставив (6.4.110) — (6.4.114) в (6.4.105) и (6.4.107) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , найдем

$$L(\xi_1) = 0, \quad (6.4.115)$$

$$\begin{aligned} L(\xi_2) = & k e^{i(\varphi + \varphi_0)} - 2\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta_1 \partial T_2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta_2 \partial T_2} - \omega_1' \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} - \omega_2' \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} + \\ & + i \frac{p_0 I_x}{I} \frac{\partial \xi_1}{\partial T_2} + \gamma |\xi_1|^2 \xi_1 + (\mu_1 + \mu_2 |\xi_1|^2) \left(\omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} \right) + \\ & + i (\chi_1 + \chi_2 |\xi_1|^2) \xi_1 \end{aligned} \quad (6.4.116)$$

$$\omega_1 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = - \frac{dp_0}{dT_2} + v_0 + v_2 p_0 + v_1 \operatorname{Im}(\xi_1 e^{-i\varphi}). \quad (6.4.117)$$

Здесь использовано обозначение

$$\begin{aligned} L = & \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 - \\ & - i \frac{p_0 I_x}{I} \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \omega_0^2. \end{aligned} \quad (6.4.118)$$

Решение уравнения (6.4.115) имеет вид

$$\xi_1 = A_1(T_2) e^{i\eta_1} + A_2(T_2) e^{i\eta_2}. \quad (6.4.119)$$

С его учетом уравнение (6.4.117) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = \\ = -\frac{dp_0}{dT_2} + v_0 + v_2 p_0 + \\ + v_1 [a_1 \sin(\eta_1 - \varphi + \theta_1) + a_2 \sin(\eta_2 - \varphi + \theta_2)], \quad (6.4.120) \end{aligned}$$

где $A_n = a_n \exp(i\theta_n)$ с действительными a_n и θ_n . Поскольку $p_0 \approx \omega_1$, то величина $\eta_1 - \varphi$ является медленно меняющейся функцией времени. Будем считать ее функцией T_2 . Далее, решение уравнения (6.4.120) содержит члены, которые стремятся к бесконечности при η_1 , η_2 или $\varphi \rightarrow \infty$ (т. е. при $t \rightarrow \infty$), нарушая тем самым наше разложение, если только не выполнено условие

$$\frac{dp_0}{dT_2} = v_0 + v_2 p_0 + v_1 a_1 \sin(\eta_1 - \varphi + \theta_1). \quad (6.4.121)$$

При выполнении этого условия p_2 будет иметь вид

$$p_2 = \frac{a_2 v}{p_0 - \omega_2} \cos(\eta_2 + \theta_2 - \varphi). \quad (6.4.122)$$

Зная ξ_1 , можем переписать (6.4.114) в виде

$$\begin{aligned} L(\xi_3) = Q_1 e^{i\eta_1} + Q_2 e^{i\eta_2} + (i\omega_1 \mu_2 + i\chi_2 + \gamma) A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\eta_1 - \eta_2)} + \\ + (i\omega_2 \mu_2 + i\chi_2 + \gamma) \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\eta_2 - \eta_1)}, \quad (6.4.123) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 = -i(\omega_1 - \omega_2) \frac{dA_1}{dT_2} - i\omega_1' A_1 + \\ + i\{(\omega_1 \mu_1 + \chi_1) + (-i\gamma + \chi_2 + \omega_1 \mu_2) a_1^2 + \\ + [-2i\gamma + 2\chi_2 + (\omega_1 + \omega_2) \mu_2] a_2^2\} A_1 + k e^{i(\varphi + \varphi_0 - \eta_1)}. \quad (6.4.124) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = i(\omega_1 - \omega_2) \frac{dA_2}{dT_2} - i\omega_2' A_2 + \\ + i\{(\omega_2 \mu_1 + \chi_1) + [-2i\gamma + 2\chi_2 + (\omega_1 + \omega_2) \mu_2] a_1^2 + \\ + (-i\gamma + \chi_2 + \omega_2 \mu_2) a_2^2\} A_2. \quad (6.4.125) \end{aligned}$$

Вековые члены в (6.4.123) будут исключены при условии $Q_1 = Q_2 = 0$. Полагая в (6.4.124) и (6.4.125) $A_n = a_n \exp(i\theta_n)$ с действительными a_n и θ_n , учитывая, что $Q_1 = Q_2 = 0$, и разделяя

действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{da_1}{dT_2} = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_1^3 + \lambda_{13}a_1a_2^2 + \frac{k}{\omega_1 - \omega_2} \sin \Gamma, \quad (6.4.126)$$

$$\frac{da_2}{dT_2} = \lambda_{21}a_1 + \lambda_{22}a_2^3 + \lambda_{23}a_1^2a_2, \quad (6.4.127)$$

$$\frac{d\theta_1}{dT_2} = -\frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (a_1^2 + 2a_2^2) - \frac{k}{(\omega_1 - \omega_2)a_1} \cos \Gamma, \quad (6.4.128)$$

$$\frac{d\theta_2}{dT_2} = \frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (2a_1^2 + a_2^2). \quad (6.4.129)$$

Здесь принято обозначение

$$\Gamma = \varphi - \eta_1 - \theta_1 + \varphi_0, \quad (6.4.130)$$

$$[\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}] = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} [\omega_1\mu_1 + \chi_1 - \omega'_1, \omega_1\mu_2 + \chi_2, (\omega_1 + \omega_2)\mu_2 + 2\chi_2], \quad (6.4.131)$$

$$[\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}] = -\frac{1}{\omega_1 - \omega_2} [\omega_2\mu_1 + \chi_1 - \omega'_2, \omega_2\mu_2 + \chi_2, (\omega_1 + \omega_2)\mu_2 + 2\chi_2]. \quad (6.4.132)$$

Объединяя (6.4.128) и (6.4.130) и вводя параметр расстройки σ , определяемый соотношением

$$\rho_0 = \omega_1 + \varepsilon^2\sigma,$$

получаем

$$\frac{d\Gamma}{dT_2} = \sigma + \frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (a_1^2 + 2a_2^2) + \frac{k}{(\omega_1 - \omega_2)a_1} \cos \Gamma. \quad (6.4.133)$$

6.4.7. Задача о космическом корабле типа Земля — Луна

Следующим примером будет одномерная задача о космическом корабле типа Земля — Луна, которая рассматривалась в п.2.4.2, 3.2.2 и 4.1.7 и задается соотношениями

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0. \quad (6.4.134)$$

Если при малом μ разложить t по степеням x , то полученное разложение будет иметь особенность в точке $x=1$ и область неравномерности порядка $1-x=O(\mu)$. Таким образом, для нахождения разложения, пригодного для всех x , методом многих масштабов введем две переменные (Найфэ [1964], [1965a])

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1-x}{\mu}.$$

В этих переменных уравнение (6.4.134) примет вид

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t}{\partial \xi} - \mu^{-1} \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{1-\mu}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right)^{-1/2}, \quad (6.4.135)$$

где все функции x считаются зависящими от ξ , за исключением источника неравномерности, выражения $1-x$, которое записано как функция η в виде $\mu\eta$. Предположим теперь, что t допускает следующее равномерно пригодное разложение:

$$t = t_0(\xi, \eta) + \mu t_1(\xi, \eta) + \mu^2 t_2(\xi, \eta) + \dots \quad (6.4.136)$$

Подставив (6.4.136) в (6.4.135) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$\frac{\partial t_0}{\partial \eta} = 0, \quad (6.4.137)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t_0}{\partial \xi} - \frac{\partial t_1}{\partial \eta} \right) = \sqrt{\frac{\xi \eta}{\eta + \xi}}, \quad (6.4.138)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\partial t_2}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi} \left(\frac{\eta}{\eta + \xi} \right)^{3/2}. \quad (6.4.139)$$

Общее решение уравнения (6.4.137) имеет вид

$$\sqrt{2} t_0 = A(\xi), \quad (6.4.140)$$

где A определяется из условия ограниченности отношения t_1/t_0 при всех η . Решение уравнения (6.4.138) имеет вид

$$-\sqrt{2} t_1 = -A'(\xi) \eta + \sqrt{\xi \eta (\eta + \xi)} - \xi^{3/2} \text{Arc sh } \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} + B(\xi). \quad (6.4.141)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ равенство (6.4.141) переходит в следующее:

$$-\sqrt{2} t_1 = [\sqrt{\xi} - A'(\xi)] \eta + \frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi} - \xi^{3/2} \ln 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} + B(\xi) + O(\eta^{-1}). \quad (6.4.142)$$

Таким образом, выражение для t_1 содержит два члена, доставляющих особенность при $\eta \rightarrow \infty$: это — слагаемое, пропорциональное η , и слагаемое, пропорциональное $\ln(\eta)$. Первое слагаемое может быть исключено при условии

$$A'(\xi) = \sqrt{\xi}, \quad A = \frac{2}{3} \xi^{3/2} + a, \quad (6.4.143)$$

где a — произвольная постоянная. Относительно второго члена заметим, что $\ln(\eta)$ меняется медленно вместе с x и μ , хотя и η является быстрой переменной. Поэтому этот член должен быть выражен через переменную ξ , т. е. должен быть записан в виде

$$\xi^{3/2} \ln 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \xi^{3/2} \ln \sqrt{\frac{4(1-\xi)}{\mu \xi}}.$$

Тогда t_1 имеет особенность при $\xi \rightarrow 1$ и будет ограничено при $\xi \rightarrow 1$, если выполнено условие

$$B(\xi) = \frac{1}{2} \xi^{3/2} \ln(1-\xi) + C(\xi). \quad (6.4.144)$$

Функция $C(\xi)$ определится из требования ограниченности отношения t_2/t_1 при $\eta \rightarrow \infty$.

Подставив полученные выше решения в (6.4.139), найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\partial t_2}{\partial \eta} = & \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta(\eta+\xi)}{\xi}} - \sqrt{\frac{\eta\xi}{\eta+\xi}} - \frac{1}{2} \sqrt{\xi} \left(\frac{\eta}{\eta+\xi} \right)^{3/2} + \\ & + \frac{3}{2} \sqrt{\xi} \operatorname{Arc sh} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - \frac{3}{4} \sqrt{\xi} \ln(1-\xi) + \frac{1}{2} \frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi). \end{aligned} \quad (6.4.145)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ уравнение (6.4.145) принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\partial t_2}{\partial \eta} = & -\frac{7}{4} \sqrt{\xi} + \frac{3}{2} \sqrt{\xi} \ln 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - \frac{3}{4} \sqrt{\xi} \ln(1-\xi) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi) + O(\eta^{-1}). \end{aligned} \quad (6.4.146)$$

Здесь вновь член $\ln \sqrt{\eta}$ следует выразить через ξ . Уравнение (6.4.146) соответственно примет вид

$$\sqrt{2} \frac{\partial t_2}{\partial \eta} = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \ln \mu \xi \right) \sqrt{\xi} + \frac{1}{2} \frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi) + O(\eta^{-1}).$$

Для ограниченности отношения t_2/t_1 при $\eta \rightarrow \infty$ должно быть выполнено

$$C'(\xi) = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \ln \mu \xi \right) \sqrt{\xi} + \frac{1}{2} \frac{\xi^{3/2}}{1-\xi},$$

откуда

$$C = -\frac{7}{6} \xi^{3/2} - \sqrt{\xi} - \frac{1}{2} \xi^{3/2} \ln \frac{\mu \xi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} + c, \quad (6.4.147)$$

где c — постоянная интегрирования.

Выразив t_0 и t_1 через x и используя начальное условие $t(x=0)=0$, получим $a=c=0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} t = & \left(1 - \frac{1}{3} x \right) \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)(1-x+\mu x)} + \\ & + \mu \left[x^{3/2} \operatorname{Arc sh} \sqrt{\frac{1-x}{\mu x}} - \frac{1}{2} x^{3/2} \ln \frac{4(1-x)}{\mu x} + \right. \\ & \left. + \frac{7}{6} x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (6.4.148)$$

Рассмотрим теперь иной метод (Найфэ [1965a]) определения функций $A(\xi)$ и $B(\xi)$. Поскольку разложение

$$\sqrt{2}t = A(\xi) + \mu \left[A'(\xi) \eta - \sqrt{\xi\eta(\eta + \xi)} + \xi^{3/2} \operatorname{Ar sh} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - B(\xi) \right] + O(\mu^2) \quad (6.4.149)$$

предполагается равномерно пригодным для всех x , то вдали от $x=1$ оно должно сводиться к прямому разложению (см. упр. 2.12).

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) + O(\mu^2). \quad (6.4.150)$$

Для нахождения $A(\xi)$ и $B(\xi)$ вместо условия ограниченности t_n/t_{n-1} при всех ξ и η может быть использовано это условие. Выразив (6.4.149) через x и разложив при малом μ , получим

$$\sqrt{2}t = A(x) + \mu \left[A'(x) \frac{1-x}{\mu} - \frac{1-x}{\mu} \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} \ln \frac{4(1-x)}{\mu x} - B(x) \right] + O(\mu^2). \quad (6.4.151)$$

Чтобы первые члены в (6.4.150) и (6.4.151) совпали, должно быть выполнено

$$A(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}. \quad (6.4.152)$$

Тогда вторые члены совпадут при условии

$$B(x) = -\frac{7}{6}x^{3/2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2} \ln \frac{4(1-x)}{\mu x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}. \quad (6.4.153)$$

Подставив эти выражения для A и B в разложение (6.4.149) и выразив результат через x , получим в точности разложение (6.4.148).

6.4.8. Модель диспергирующих волн

Вновь рассмотрим модельное уравнение Брезертона [1964]

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} + \varphi_{xx} + \varphi = \varepsilon \varphi^3. \quad (6.4.154)$$

Линеаризованное уравнение допускает решение в форме бегущих волн

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cos \theta, \\ \theta &= kx - \omega t, \quad \omega^2 = k^4 - k^2 + 1. \end{aligned} \quad (6.4.155)$$

Для отыскания волн, параметры которых медленно меняются в пространстве и во времени, будем следовать Найфэ и Хассану

[1971], предположив, что имеется разложение вида

$$\varphi = \varphi_0(\theta, X_1, T_1) + \varepsilon \varphi_1(\theta, X_1, T_1) + \dots, \quad (6.4.156)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon^{-1} \zeta(X_1, T_1), \quad X_1 = \varepsilon x, \quad T_1 = \varepsilon t, \\ k &= \theta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \quad \omega = -\theta_t = -\frac{\partial \zeta}{\partial T_1}. \end{aligned} \quad (6.4.157)$$

В новых переменных θ , X_1 и T_1 пространственная и временная производные примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\varepsilon \omega \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial T_1} - \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\varepsilon k \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X_1} + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}, \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} &= k^4 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 4\varepsilon k^3 \frac{\partial^4}{\partial \theta^3 \partial X_1} + 6\varepsilon k^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \dots \end{aligned}$$

Подставив (6.4.156) в (6.4.154) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$L(\varphi_0) \equiv (\omega^2 + k^2) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} + k^4 \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial \theta^4} + \varphi_0 = 0, \quad (6.4.158)$$

$$\begin{aligned} L(\varphi_1) &= \varphi_0^3 + 2\omega \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial T_1} - 2k \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial X_1} - 4k^3 \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial \theta^3 \partial X_1} + \\ &+ \left(\frac{\partial \omega}{\partial T_1} - \frac{\partial k}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - 6k^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \theta^3}. \end{aligned} \quad (6.4.159)$$

Решение уравнения (6.4.158) должно иметь вид

$$\varphi_0 = A(X_1, T_1) e^{i\theta} + \bar{A}(X_1, T_1) e^{-i\theta}, \quad (6.4.160)$$

где

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1.$$

Подставив выражение для φ_0 в (6.4.158), получим

$$L(\varphi_1) = Q(X_1, T_1) e^{i\theta} + A^3 e^{3i\theta} + CC, \quad (6.4.161)$$

где

$$Q = 2i\omega \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2ik(2k^2 - 1) \frac{\partial A}{\partial X_1} + i \frac{\partial \omega}{\partial T_1} A + i(6k^3 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1} A + 3A^2 \bar{A}. \quad (6.4.162)$$

Для того чтобы вековые члены отсутствовали, должно выполняться условие $Q = 0$. Для упрощения этого условия заме-

тим, что

$$\omega\omega' = 2k^2 - k, \quad (6.4.163)$$

где $\omega' = d\omega/dk$ — групповая скорость. Дифференцирование (6.4.163) по переменной X_1 дает

$$\omega\omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1} + \omega'^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} = (6k^2 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1}. \quad (6.4.164)$$

Если функция ξ дважды непрерывно дифференцируема, то ω и k удовлетворяют условию совместности

$$\frac{\partial k}{\partial T_1} + \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = 0$$

или иначе

$$\frac{\partial k}{\partial T_1} + \omega' \frac{\partial k}{\partial X_1} = 0. \quad (6.4.165)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \omega}{\partial T_1} = \omega' \frac{\partial k}{\partial T_1} = -\omega'^2 \frac{\partial k}{\partial X_1},$$

и уравнение (6.4.164) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial T_1} + (6k^2 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1} = \omega\omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1}. \quad (6.4.166)$$

С помощью равенств (6.4.163) и (6.4.166) условие $Q = 0$ может быть упрощено и записано в виде

$$2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2\omega' \frac{\partial A}{\partial X_1} + \omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1} A = \frac{3i}{\omega} A^2 \bar{A}. \quad (6.4.167)$$

Полагая в (6.4.167) $A = (1/2)a \exp(i\beta)$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{\partial a^2}{\partial T_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} (\omega' a^2) = 0, \quad (6.4.168)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \omega' \frac{\partial \beta}{\partial X_1} = \frac{3a^2}{8\omega}. \quad (6.4.169)$$

Решение, полученное в этом пункте с помощью метода многих масштабов, является другим представлением решения, полученного в п. 5.8.1 с помощью усреднения лагранжиана. В самом деле, уравнения, описывающие изменение амплитуды и волнового числа, имеют в точности тот же вид. Однако в п. 5.8.1 фаза отсутствовала, зато дисперсионное соотношение (5.8.9) зависело от амплитуды. В данном пункте дисперсионное соотношение не зависит от амплитуды, но решение задает изменение фазы. Чтобы показать эквивалентность этих представлений, разложим вели-

чину θ из п. 5.8.1 в виде

$$\theta = \theta_0 - \varepsilon \tilde{\beta}.$$

Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} = k_0 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x}, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.4.170)$$

Подставив (6.4.170) в (5.8.9) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= k_0^2 - k_0^2 + 1, \\ \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} &= \frac{3a^2}{8\omega_0}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (6.4.169).

6.4.9. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона

Последним примером, рассмотренным в этой главе, будет уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0, \quad (6.4.171)$$

изученное в п. 5.8.3 с помощью метода Уизема усреднения лагранжиана. В нашем изложении мы следуем Люку [1966].

Предположим, что u допускает равномерно пригодное разложение вида

$$u(x, t) = u_0(\theta, X_1, T_1) + \varepsilon u_1(\theta, X_1, T_1) + \dots, \quad (6.5.172)$$

где θ , X_1 и T_1 определены в (6.4.157). Подставив (6.4.172) в (6.4.171), используя выражения для производных из предыдущего пункта и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$(\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + V'(u_0) = 0, \quad (6.4.173)$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + V''(u_0) u_1 = \\ = 2k \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial X_1} + 2\omega \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial T_1} + \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6.4.174)$$

Проинтегрировав однократно уравнение (6.4.173), придем к уравнению

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + V(u_0) = E(X_1, T_1). \quad (6.4.175)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = \sqrt{\omega^2 - k^2} \int_{u_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\{2[E - V(\xi)]\}^{1/2}} - \eta(X_1, T_1), \quad (6.4.176)$$

где $E(X_1, T_1)$ и $\eta(X_1, T_1)$ — неизвестные функции, которые определяются из анализа уравнения (6.4.174). Обратив равенство (6.4.176), найдем

$$u_0(\theta, X_1, T_1) = f(\theta + \eta, E, \omega^2 - k^2). \quad (6.4.177)$$

Предположим, что функция f периодична с постоянным периодом, который нормировкой может быть сведен к единице, т. е. предположим, что

$$\sqrt{\omega^2 - k^2} \oint \frac{d\xi}{\{2[E - V(\xi)]\}^{1/2}} = 1. \quad (6.4.178)$$

Это равенство дает одно соотношение между величинами ω , k и E , которое является дисперсионным соотношением.

Частное решение уравнения (6.4.174) содержит члены, из-за которых отношение u_1/u_0 не ограничено при $\theta \rightarrow \infty$, если только правая часть (6.4.174) не ортогональна решению сопряженного однородного уравнения. Это условие иногда называют условием разрешимости. Оно представляет собой обобщение условия исключения вековых членов, которое широко применялось в этой книге. Поскольку уравнение (6.4.174) является самосопряженным, то условие разрешимости означает, что его правая часть ортогональна решению однородного уравнения, которое, как легко показать, имеет вид $u_1 = \partial u_0 / \partial \theta$. Таким образом, требования условия разрешимости сводятся к равенству

$$\oint \left(2k \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial X_1} + 2\omega \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial T_1} + \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} d\theta = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \left[\omega \oint \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right] + \frac{\partial}{\partial X_1} \left[k \oint \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right] = 0. \quad (6.4.179)$$

Взяв в качестве переменной интегрирования вместо θ переменную u_0 и подставив из (6.4.175) выражение для $\partial u_0 / \partial \theta$, можем привести это условие к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{2[E - V(u_0)]} du_0 \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{k}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{2[E - V(u_0)]} du_0 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.4.180)$$

Это равенство задает второе соотношение между ω , k и E . Третьим соотношением является условие совместности (6.4.165).

Результаты этого пункта согласуются с результатами, полученными в п. 5.8.3 с помощью вариационного подхода.

6.4.10. Преимущества и ограничения обобщенного метода

Этот метод применим, конечно, ко всем задачам, которые могут быть изучены с помощью метода разложения производной или процедуры разложения с двумя переменными. Кроме того, он применим также и в тех случаях, когда оба названных метода терпят неудачу. Это имеет место в задачах, требующих нелинейных масштабов (например, в случае осциллятора с медленно меняющимися коэффициентами), или в задачах с резкими изменениями (например, в задаче о космическом корабле типа Земля—Луна). Однако данный метод требует сложных вычислений, и в задачах нелинейных колебаний с постоянными коэффициентами предпочтительными являются метод разложения производной и процедура разложения с двумя переменными.

Для получения равномерно пригодных разложений в задачах, которые поддаются рассмотрению с помощью метода координатных преобразований, может быть использован метод многих масштабов. Кроме того, этот метод может быть использован в тех случаях, когда метод координатных преобразований неприменим, как это имеет место в задачах с затуханием и резкими изменениями. В тех случаях, когда применим метод координатных преобразований, он может иметь преимущество, связанное с неявным заданием решения. Для гиперболических уравнений без дисперсии желательным является получить разложение в точных характеристиках. Метод многих масштабов, однако, может быть рассмотрен как обобщение метода координатных преобразований, если масштабы задаются неявно в исходных переменных.

Примеры, рассмотренные в этой главе, показали, что метод многих масштабов применим как к задачам, которые могут быть изучены с помощью метода сращивания асимптотических разложений, таким, как задача о космическом корабле Земля—Луна, так и к задачам, которые не могут быть изучены с помощью последнего метода, таким, как задачи о нелинейных колебаниях. Метод многих масштабов дает одно равномерно пригодное разложение в отличие от метода сращивания асимптотических разложений, в котором рассматриваются два разложения, подлежащих сращиванию. Хотя и в методе многих масштабов обыкновенное дифференциальное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение в частных производных, получение первого приближения не представляет больших трудностей, чем решение первого внутреннего уравнения. Однако трудными для

решения могут оказаться уравнения, определяющие различные масштабы (Махони [1962]). Кроме того, данный метод еще не применялся к дифференциальным уравнениям в частных производных, для которых первый член разложения является нелинейным, как, например, в задаче о вязком обтекании тела, и к эллиптическим дифференциальным уравнениям в частных производных с неоднородными граничными возмущениями, таким, как в задаче об обтекании тонкого крыла.

Метод многих масштабов применим к задачам, которые могут быть изучены с помощью метода усреднения, метода Крылова — Боголюбова — Митропольского и с помощью преобразований Ли, равно как к задачам, которые не поддаются изучению этими методами. Если система задана своим гамильтонианом, то метод преобразований Ли имеет то преимущество, что высшие приближения могут быть найдены рекуррентно. Однако метод многих масштабов в сочетании с преобразованиями Ли может быть применен непосредственно к гамильтониану.

Упражнения

6.1. Определить равномерное разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

и получить затем частные случаи, соответствующие функциям $f = \dot{u} + \beta u^3$, $\beta u^3 + (1 - u^2) \dot{u}$ и $-|\dot{u}| \dot{u}$.

6.2. Определить равномерные разложения второго порядка для уравнения

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t) u = 0$$

при δ , близком к 0 и 4.

6.3. Определить равномерное разложение второго порядка для уравнения

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos^3 t) u = 0.$$

6.4. Определить равномерные разложения первого порядка для уравнения

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t) u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

и получить частные случаи при $f = \beta u^3$, $-|\dot{u}| \dot{u}$ и $(1 - u^2) \dot{u}$.

6.5. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon [u^3 + (1 - u^2) \dot{u}] + K \cos \omega t.$$

Определить равномерное разложение первого порядка для случаев

(а) $K = O(1)$ и значения ω далеки от ω_0 , $3\omega_0$ и $\omega_0/3$,

(б) $K = O(1)$ и $\omega \approx 3\omega_0$,

(в) $K = O(1)$ и $\omega \approx \omega_0/3$,

(г) $K = O(\epsilon)$ и $\omega \approx \omega_0$.

6.6. Рассмотреть систему

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2\varepsilon \frac{d}{dt} [(1-z)u] + 2K \cos \omega t,$$

$$\tau \dot{z} + z = u^2.$$

Определить равномерные разложения первого порядка для случаев, перечисленных в упражнении 6.5.

6.7. Задача о старте спутника с малой тягой с круговой орбиты может быть приведена к виду

$$u'' + u - v^2 = -\frac{\varepsilon v^2}{u^3} (su' + cu),$$

$$v' = -\frac{\varepsilon s v^3}{u^3},$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad v(0) = 1,$$

где штрих означает дифференцирование по θ , а ε , s и c — постоянные. Показать, что при малом ε имеют место разложения (Найфэ [1966])

$$v = f + 3\varepsilon c f^{-3} \ln f + O(\varepsilon^2),$$

$$u = f^2 + \varepsilon \left\{ f^{7/2} \left[c \cos \left(\theta + \frac{c}{s} \ln f \right) + 2s \sin \left(\theta + \frac{c}{s} \ln f \right) \right] + \right.$$

$$\left. + c f^{-2} (6 \ln f - 1) \right\} + O(\varepsilon^2),$$

где $f = (1 - 4\varepsilon s \theta)^{1/4}$. Является ли это разложение пригодным для всех θ ?

6.8. Рассмотрим задачу, определяемую соотношениями (6.4.105) и (6.4.106) при постоянных ω_0 , ρ , γ , μ_i и χ_i .

(а) Определить равномерное разложение первого порядка для случая $K = O(1)$ и значений ρ , далеких от ω_1 . (б) Показать, что это разложение непригодно при $\rho \approx 0$ или $2\omega_1 - \omega_2$, и определить равномерные разложения первого порядка, пригодные в этих случаях (Найфэ и Сарик [1971б]). (в) Определить равномерное разложение первого порядка для случаев $K = O(\varepsilon^2)$ и $\rho \approx \omega_1$, используя сначала метод многих масштабов (Найфэ и Сарик [1971б]) и затем метод усреднения (Клэр [1971]). Сравнить оба результата.

6.9. Используя метод многих масштабов (МММ), определить равномерные разложения второго порядка для задач

- (а) $\varepsilon y'' \mp y' + y = 0$,
 (б) $\varepsilon y'' \mp y' = 2x$,
 (в) $\varepsilon y'' \pm (2x+1) y' = 1$

с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

6.10. Определить равномерные разложения первого порядка для задач

- (а) $\varepsilon y'' - a(x) y' + b(x) y = 0$, $a(x) > 0$,
 (б) $\varepsilon y'' \mp y' + y^2 = 0$,
 (в) $\varepsilon y'' \mp y y' - y = 0$,
 (г) $\varepsilon y'' \mp (2x+1) y' + y^2 = 0$,
 (д) $\varepsilon y'' \mp y' + y^n = 0$, n — натуральное число, с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

6.11. Используя МММ, определить равномерное разложение первого порядка для задачи

$$\varepsilon y'' + a(x) y' = 1, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

при условии, что $a(x)$ имеет простой корень в точке μ из интервала $[0, 1]$.

6.12. Используя МММ, определить равномерное разложение первого порядка для уравнения

$$y'' + \lambda^2 (1-x)^n f(x) y = 0,$$

где n — натуральное число, $f(x) > 0$ и $\lambda \gg 1$.

6.13. Определить равномерные разложения первого порядка для уравнения (6.4.84), имеющие вид

$$(a) \quad u = A(\xi) \operatorname{erfc}[\eta, v(\xi)], \quad (b) \quad u = A(\xi) \operatorname{dn}[\eta, v(\xi)].$$

6.14. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2(\varepsilon t) u = \varepsilon u^3 + K \cos \varphi,$$

в котором $\varphi = \omega(\varepsilon t)$. Определить равномерные разложения первого порядка для случаев

(а) $K = O(1)$ и значения ω далеки от ω_0 , $3\omega_0$ и $\omega_0/3$,

(б) $K = O(1)$ и $\omega \approx 3\omega_0$,

(в) $K = O(1)$ и $\omega \approx \omega_0/3$,

(г) $K = O(\varepsilon)$ и $\omega \approx \omega_0$.

6.15. Рассмотрим задачу, определяемую соотношениями (6.4.105)—(6.4.107) с переменными коэффициентами. Определить равномерное разложение первого порядка для случая, когда $K = O(1)$ и значения p далеки от ω_1 . Показать, что это разложение непригодно при $p \approx 0$ или $2\omega_1 - \omega_2$, и определить равномерные разложения, пригодные в этих случаях (Найфэ и Сарик [1972a]).

6.16. Решить упражнение 5.14, используя МММ.

6.17. Определить равномерное разложение для малых амплитуд в системе

$$\ddot{x} - \dot{y} + 2x + 3x^2 + 2y^2 = 0, \\ \ddot{y} + \dot{x} + 2\delta y + 4xy = 0,$$

полагая $\delta \approx 1$.

6.18. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \gamma^2 u = \varepsilon u^3, \\ u(x, 0) = a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Определить равномерное разложение первого порядка при условии

$$c^2 k^2 \approx \gamma^2.$$

6.19. Рассмотреть уравнение

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma^2 u = \varepsilon u^3.$$

Используя МММ, определить разложения первого порядка для бегущих волн при условиях: (а) амплитуда и фаза меняются медленно при изменении состоя-

ния и времени; (б) волновое число, частота, амплитуда и фаза меняются медленно с изменением состояния и времени.

6.20. Продольные колебания свободной однородной балки с нелинейной зависимостью между моментом и кривизной задаются уравнением

$$\omega_{tt} + c^2 \omega_{xxxx} = -\varepsilon (\omega_{xx}^3)_{xx},$$

где c и ε — постоянные. Используя МММ, определить равномерные разложения первого порядка при малом ε для случаев, перечисленных в упражнении 6.19.

6.21. Используя МММ, определить во втором порядке равномерные решения в форме бегущей волны для задачи, описанной в упражнении 5.15, для случаев, указанных в упражнении 6.19.

6.22. Вновь рассмотреть модельное уравнение Брезертона

$$\Phi_{tt} + \Phi_{xxxx} + \Phi_{xx} + \Phi = \varepsilon f(\Phi, \Phi_t, \Phi_x)$$

теперь уже с нелинейной функцией f общего вида. Используя МММ, определить при малом ε равномерно пригодные разложения для случая резонанса в n -й гармонике. Применить результаты в частных случаях, соответствующих: (а) резонансу во второй гармонике; (б) резонансу в третьей гармонике.

6.23. Используя МММ, дать формулировку задач, из которых определяются равномерные решения первого порядка в примерах

- (а) $\varepsilon u_{xx} + u_{yy} + u_x = 0,$
- (б) $\varepsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x) u_x = 0,$
- (в) $\varepsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x = 0,$
- (г) $\varepsilon (u_{xx} + u_{yy}) + a(x, y) u_x + b(x, y) u = 0,$
- (д) $\varepsilon^2 \nabla^4 u + a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_x + c(x, y) u_y + d(x, y) u = 0$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= F_1(x), & u(x, 1) &= F_2(x), \\ u(0, y) &= G_1(y), & u(1, y) &= G_2(y). \end{aligned}$$

Асимптотические решения линейных уравнений

В этой главе дадим описание новых методов, которые вместе с некоторыми методами, описанными в предыдущих главах, будут использованы для получения асимптотических решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Нас будут интересовать дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Применяемый подход состоит в том, чтобы, используя наличие большого или малого параметров, получить возмущения по параметру, или, используя малые или большие значения координат, получить возмущения по координате.

Если для системы обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечно удаленная точка является регулярной особой точкой, то решения могут быть получены в виде сходящихся рядов по обратным степеням координаты; исключение составляют лишь некоторые случаи задач с регулярной особой точкой, в которых одно из решений может содержать логарифм координаты. В данной главе нас будут интересовать случаи с нерегулярной особенностью, когда решение должно быть представлено асимптотическим разложением. При получении возмущений по параметру последний может быть малым или большим, причем первый случай охватывает также случай с медленно меняющимися коэффициентами. В этих случаях разложения получаются с помощью преобразования Лиувилля—Грина (ВКБ) и его обобщений. Получаемые разложения являются пригодными всюду, за исключением некоторых точек, называемых точками возврата, или переходными точками. Разложения, пригодные всюду, включая и точки возврата, получаются с помощью преобразования Лангера и его обобщений.

Рассмотрение дифференциальных уравнений в частных производных ограничено случаем приведенного волнового уравнения с переменным показателем преломления. Вначале с помощью процедуры Борна—Неймана строится разложение для случая, когда показатель преломления мало отличается от постоянной, и затем решение представляется диаграммами Фейнмана. Получаемое разложение пригодно только на коротких расстояниях, а область его равномерности может быть расширена с помощью метода

перенормировок. Затем описаны приближение геометрической оптики и метод сглаживания.

Поскольку рассматриваемые задачи являются линейными, то существует обширная литература, посвященная их асимптотическому решению и математическому обоснованию этих решений. В этой главе мы даем описание методов получения формальных асимптотических разложений для решений уравнений, не вдаваясь в математическое обоснование их. Кроме того, процитировано ограниченное число статей. Читателя, интересующегося более обширными ссылками и математической строгостью, отсылаем к Эрдеи [1956], Джеффрису [1962], Чезари [1971], Беллману [1964], Уилкоксу [1964], Вазову [1965], Фещенко, Шкилеву и Николенко [1967], Вазову [1968] и Фришу [1968].

Сначала, в § 7.1, рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка; системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка рассмотрены в § 7.2. Задачи с точками возврата исследуются в § 7.3, приведенное волновое уравнение изучается в § 7.4.

7.1. Дифференциальные уравнения второго порядка

В этом параграфе мы будем иметь дело с асимптотическим разложением решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x; \varepsilon) \frac{dy}{dx} + q(x; \varepsilon) y = r(x; \varepsilon), \quad (7.1.1)$$

где ε — параметр, который может быть малым или большим. Будем предполагать, что функции p и q не обращаются одновременно в нуль на интересующем нас интервале. Сначала исследуем асимптотические решения этого уравнения в окрестности нерегулярной особой точки. Затем опишем методику отыскания асимптотического решения уравнения (7.1.1) для случая, когда оно содержит большой параметр. Затем рассмотрим особые задачи возмущений с малым параметром при старшей производной. Наконец, опишем методы получения асимптотических разложений для случаев, когда p , q и r являются медленно меняющимися функциями x .

7.1.1. Разложения в окрестности нерегулярной особенности

Исследуем асимптотическое поведение решений уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0 \quad (7.1.2)$$

при $x \rightarrow \infty$ и при условии, что бесконечно удаленная точка является нерегулярной особой точкой. Прежде чем взяться за

намеченное, дадим определения регулярной особой точки и иррегулярной особой точки. Предположим, что $p(x)$ и $q(x)$ допускают разложения по возрастающим степеням $(x-x_0)$, $x_0 < \infty$, вида

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0(x-x_0)^\alpha [1 + p_1(x-x_0) + \dots], & p_0 \neq 0, \\ q(x) &= q_0(x-x_0)^\beta [1 + q_1(x-x_0) + \dots], & q_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Точка x_0 называется *обыкновенной точкой*, если $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, в противном случае она называется *особой точкой*. Особая точка называется *регулярной особой точкой*, если $\alpha \geq -1$ и $\beta \geq -2$; в противном случае она называется *иррегулярной особой точкой*.

Приведенные выше определения таковы, что природа конечной точки x_0 определяется почти с одного взгляда. Природа бесконечно удаленной точки может быть определена преобразованием ее в начало координат. Итак, положив в (7.1.2) $x = z^{-1}$, получим

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{q(z^{-1})}{z^4} y = 0. \quad (7.1.4)$$

Бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой исходного уравнения, если начало координат является обыкновенной точкой преобразованного уравнения, т. е. если выполнено

$$\begin{aligned} \frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} &= O(1), \\ \frac{q(z^{-1})}{z^4} &= O(1). \end{aligned} \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Этим соотношениям соответствуют в исходном уравнении соотношения

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^{-1} + O(x^{-2}), \\ q(x) &= O(x^{-4}). \end{aligned} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1.5)$$

Для того чтобы бесконечно удаленная точка была регулярной особой точкой (7.1.2), начало координат должно быть регулярной особой точкой преобразованного уравнения; т. е.

$$\begin{aligned} \frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} &= O\left(\frac{1}{z}\right), \\ \frac{q(z^{-1})}{z^4} &= O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned} \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Этим уравнениям соответствуют соотношения:

$$\begin{aligned} p(x) &= O(x^{-1}), \\ q(x) &= O(x^{-2}), \end{aligned} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1.6)$$

Таким образом, если $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в ряд по убывающим степеням x вида

$$p(x) = p_0 x^\alpha + \dots, \quad q(x) = q_0 x^\beta + \dots, \quad p_0, q_0 \neq 0,$$

то бесконечно удаленная точка будет обыкновенной точкой при $\beta \leq -4$ и при $\alpha = -1$, $p_0 = 2$ либо при $\alpha \leq -2$. В этом случае уравнение (7.1.2) имеет два решения в виде сходящихся рядов по степеням x^{-1} . Если указанные условия не выполнены и $\alpha \leq -1$, $\beta \leq -2$, то бесконечно удаленная точка является регулярной особой точкой. В этом случае уравнение имеет два решения, представимых сходящимся рядом по степеням x^{-1} вида (Фробениус [1875]):

$$y = x^\sigma (1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots), \quad (7.1.7)$$

где σ удовлетворяет так называемому показательному уравнению

$$\sigma^2 + (p_0 - 1)\sigma + q_0 = 0, \quad \text{если } \alpha = -1, \beta = -2.$$

Исключение составляют частные случаи, когда корни этого уравнения совпадают либо отличаются на целое число; в этих случаях решения могут содержать $\log x$.

Если из неравенств

$$\alpha > -1, \quad \beta > -2$$

выполнено одно или оба, то бесконечно удаленная точка является иррегулярной особой точкой. Это и есть случай, интересующий нас в данном параграфе. В этом случае уравнению (7.1.2) удовлетворяют решения вида

$$y(x) = e^{\Lambda(x)} x^\sigma u(x). \quad (7.1.8a)$$

Здесь $u(x) = O(1)$ при $x \rightarrow \infty$, причем $u(x)$ не обязательно сходится; $\Lambda(x)$ — полином относительно $x^{m/n}$. Обозначив через λx^v старший член в $\Lambda(x)$, подставив вышеприведенное решение в (7.1.2) и выделив в каждом члене главную часть, получим

$$\lambda^2 v^2 x^{2v-2} + p_0 \lambda v x^{v+\alpha-1} + q_0 x^\beta = 0. \quad (7.1.8b)$$

Тогда v определяется одним из равенств

$$v = \alpha + 1, \quad 2v = \beta + 2, \quad (7.1.8b)$$

а именно тем, которое доставляет большее значение v . Если v — натуральное число, то приведенное выше решение называется *нормальным решением* (Томе [1883]) и имеет вид

$$y = \exp(\lambda_v x^v + \lambda_{v-1} x^{v-1} + \dots + \lambda_1 x) x^\sigma (1 + a_1 x^{-1} + \dots). \quad (7.1.8г)$$

Если же ν не является натуральным числом, то это решение называется субнормальным решением; в этом случае Λ представляет собой полином относительно $x^{1/2}$, а u является рядом по возрастающим степеням $x^{-1/2}$. До сих пор мы предполагали, что p и q представляются в виде степенных рядов по x с натуральными α и β . Если α и β не являются натуральными числами, то ν — рациональное число, которое может быть представлено в виде несократимой дроби $\nu = n/k$. Тогда субнормальные решения имеют следующий общий вид:

$$y = \exp(\lambda_n x^{n\tau} + \dots + \lambda_2 x^{2\tau} + \lambda_1 x^\tau) x^\sigma (1 + a_1 x^{-\tau} + a_2 x^{-2\tau} + \dots),$$

$$\tau = k^{-1}. \quad (7.1.8д)$$

Для нахождения нормального или субнормального решения следует подставить в (7.1.2) решение соответствующего вида, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и получить уравнения, которые в свою очередь могут быть последовательно решены относительно λ_m , σ и a_m .

Рассмотрим в качестве примера частный случай

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{-n}, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (7.1.9)$$

где p_n и q_n не зависят от x . Из равенств (7.1.8в) имеем для рассматриваемого случая: $\nu = 1$. В соответствии с (7.1.8г) уравнение (7.1.2) при условии (7.1.9) имеет формальное асимптотическое решение вида

$$y = e^{\lambda x} x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}, \quad (7.1.10а)$$

где λ , согласно (7.1.8б), является корнем уравнения

$$\lambda^2 + p_0 \lambda + q_0 = 0. \quad (7.1.10б)$$

Подставив (7.1.10а) в (7.1.2) с учетом (7.1.9), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , найдем, что

$$\sigma = -\frac{\lambda p_1 + q_1}{2\lambda + p_0}, \quad (7.1.10в)$$

и получим рекуррентные соотношения относительно c_n .

Якоби [1849] получил разложения в виде нормальных решений для функций Бесселя первого порядка при больших значениях аргумента. Аналогичные результаты для уравнения Эйри получил Стокс [1857]. Хорн [1903] дал обоснование асимптотическим решениям в виде произведения экспонент и рядов по убывающим степеням x .

7.1.2. Разложение функции Бесселя нулевого порядка для больших значений аргумента

Функция Бесселя нулевого порядка задается с помощью уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (7.1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, & p_m &= 0 & \text{для } m \neq 1, \\ q_0 &= 1, & q_m &= 0 & \text{для } m \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, из (7.1.10) получаем

$$y = e^{ix} x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{-m} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1.12)$$

Подставив это разложение в (7.1.11) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим следующее рекуррентное соотношение:

$$c_{m+1} = -i \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{2(m+1)} c_m. \quad (7.1.13)$$

Поэтому, взяв $c_0 = 1$, будем иметь

$$y = e^{ix} x^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{4 \cdot 2x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} i + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1.14)$$

Поскольку отношение двух последовательных членов

$$-\frac{i(2m+1)^2}{8(m+1)x} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то правая часть в (7.1.14) расходится при всех значениях x . Однако для больших значений x имеем асимптотическое разложение, так как с возрастанием m последующие члены убывают очень быстро.

Заменив в (7.1.14) i на $-i$, можно получить другое линейно независимое разложение \tilde{y} вида

$$\tilde{y} = e^{-ix} x^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 2x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} i + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots \right). \quad (7.1.15)$$

Действительные решения могут быть получены с помощью линейных комбинаций рядов (7.1.14) и (7.1.15):

$$y_1 \sim \frac{y + \bar{y}}{2} = x^{-1/2} (u \cos x + v \sin x), \quad (7.1.16)$$

$$y_2 \sim \frac{y - \bar{y}}{2i} = x^{-1/2} (u \sin x - v \cos x).$$

Здесь

$$u(x) = 1 - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots, \quad (7.1.17a)$$

$$v(x) = \frac{1}{4 \cdot 2x} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} + \dots \quad (7.1.17b)$$

Поэтому функция Бесселя J_0 задается асимптотическим соотношением

$$J_0 \sim Ay_1 + By_2 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (7.1.18)$$

где A и B — постоянные. Из (7.1.16) — (7.1.18) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} J_0(x) = A \cos x + B \sin x, \quad (7.1.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} J'_0(x) = -A \sin x + B \cos x. \quad (7.1.20)$$

Имеем, следовательно,

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} [J_0(x) \cos x - J'_0(x) \sin x], \quad (7.1.21)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} [J_0(x) \sin x + J'_0(x) \cos x]. \quad (7.1.22)$$

Однако J_0 имеет интегральное представление вида (см., например, Айнс [1926], раздел 8.22) ¹⁾

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta. \quad (7.1.23)$$

Подставив это выражение в (7.1.21), получим

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi [\cos x \cos(x \cos \theta) + \sin x \cos \theta \sin(x \cos \theta)] d\theta = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(2x \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta + \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(2x \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

¹⁾ См. также, например, И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, „Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений“, М., «Наука», 1971.— Прим. ред.

Положив $\sqrt{2x} \sin \theta/2 = \varphi$ в первом интеграле и $\sqrt{2x} \cos \theta/2 = \alpha$ во втором, получим

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_0^\infty \cos \varphi^2 d\varphi + \int_0^\infty \cos \alpha^2 d\alpha \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Аналогично находим, что $B = 1/\sqrt{\pi}$. Поэтому, объединяя (7.1.16) и (7.1.18), получаем

$$J_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos \left(x - \frac{1}{4} \pi \right) + v \sin \left(x - \frac{1}{4} \pi \right) \right] \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1.24)$$

7.1.3. Задача Лиувилля

Лиувилль [1837] и Грин [1837] одновременно рассмотрели поведение решений уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.1.25)$$

для больших λ и при условии, что $q_1(x)$ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $q_2(x)$ непрерывна на рассматриваемом интервале $[a, b]$. С помощью преобразования

$$z = \varphi(x), \quad v = \psi(x) y(x) \quad (7.1.26)$$

уравнение (7.1.25) приводится к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\varphi'^2} \left(\varphi'' - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \frac{1}{\varphi'^2} \left[\lambda^2 q_1(x) + q_2(x) - \psi \left(\frac{\psi'}{\psi^2} \right)' \right] v = 0. \quad (7.1.27)$$

Выбрав φ и ψ такими, что

$$\varphi'' - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi} = 0, \quad q_1 = \varphi'^2, \quad (7.1.28)$$

или, что то же самое,

$$\varphi = \int [q_1(x)]^{1/2} dx, \quad \psi = [q_1(x)]^{1/4}, \quad (7.1.29)$$

можно свести (7.1.27) к уравнению

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \delta v, \quad (7.1.30)$$

где

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{q_1''}{q_1^2} - \frac{5}{16} \frac{q_1'^2}{q_1^3} - \frac{q_2}{q_1}. \quad (7.1.31)$$

Поскольку q_1 дважды непрерывно дифференцируема, а q_2 непрерывна на интервале $[a, b]$, то δ мало по сравнению с λ^2 . Следовательно, в первом приближении функция v будет решением уравнения (7.1.30) при $\delta=0$, т. е.

$$v = a \cos \lambda z + b \sin \lambda z, \quad (7.1.32)$$

где a и b — постоянные. Поэтому имеем в первом приближении

$$y = \frac{a \cos \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right] + b \sin \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{q_1(x)}}. \quad (7.1.33)$$

Если функция $q_1(x)$ отрицательна, то соотношение (7.1.33) заменится на

$$y = \frac{a \exp \left[\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right] + b \exp \left[-\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{-q_1(x)}}. \quad (7.1.34)$$

Эти разложения вполне согласуются с разложениями, полученными в п.6.4.3 с помощью метода многих масштабов. Следует отметить, что эти разложения нарушаются в окрестностях нулей функции $q_1(x)$. Эти нули называются точками возврата или переходными точками. Задачи с точками возврата рассматриваются в § 7.3.

Математики называют преобразование (7.1.26), (7.1.29) преобразованием Лиувилля — Грина, в то время как физики называют решения (7.1.33) и (7.1.34) ВКБ-приближениями в честь Вентцеля [1926], Крамерса [1926] и Бриллюэна [1926]. Однако приближенное решение такого же типа для функции Бесселя при большом порядке и больших значениях аргумента получил Карлини [1817].

7.1.4. Высшие приближения для уравнений, содержащих большой параметр

Рассмотрим асимптотическое разложение решений уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x; \lambda) y = 0 \quad (7.1.35)$$

для больших λ и при условии, что

$$q(x, \lambda) = \lambda^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(x) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (7.1.36)$$

причем $q_0 \neq 0$ на рассматриваемом интервале, а k — натуральное число. Асимптотическое решение этой задачи можно искать

в виде одного из следующих двух формальных разложений:

$$y = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a_n(x) \right] \exp \left[\lambda^k \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-n} g_n(x) \right], \quad (7.1.37)$$

$$y = \exp \left[\lambda^k \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(x) \right]. \quad (7.1.38)$$

Обоснование разложений такого вида было дано Хорном [1899]. Подставив одно из этих формальных разложений в (7.1.15) и (7.1.36) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим уравнения для последовательного определения a_n и g_n .

Для формального разложения (7.1.37) при $k=1$ эти уравнения имеют вид

$$g_0'^2 + q_0 = 0, \quad (7.1.39)$$

$$2g_0'a_0' + (q_1 + g_0'')a_0 = 0, \quad (7.1.40)$$

$$2g_0'a_m' + (q_1 + g_0'')a_m + \sum_{s=1}^m a_{m-s}q_{s+1} + a_{m-1}'' = 0 \quad \text{для } m \geq 1. \quad (7.1.41)$$

Решение уравнения (7.1.39) имеет вид

$$g_0 = \pm i \int [q_0(x)]^{1/2} dx. \quad (7.1.42)$$

Решением уравнения (7.1.40) является функция

$$a_0 \propto [g_0']^{-1/2} \exp \left[- \int \frac{q_1(x)}{2g_0'(x)} dx \right],$$

которую можно переписать в виде

$$a_0 = c [q_0(x)]^{-1/4} \exp \pm \left[\frac{i}{2} \int \frac{q_1(x)}{[q_0(x)]^{1/2}} dx \right], \quad (7.1.43)$$

где c — постоянная. Следовательно, в первом приближении будет иметь место

$$y = \frac{c_1 \cos \beta(x) + c_2 \sin \beta(x)}{[q_0(x)]^{1/4}} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad (7.1.44)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а

$$\beta(x) = \lambda \int^x [q_0(x)]^{1/2} \left[1 + \frac{q_1(x)}{2\lambda q_0(x)} \right] dx. \quad (7.1.45)$$

Высшие приближения могут быть получены последовательным решением уравнений (7.1.41) относительно a_m .

Если вместо (7.1.37) мы использовали бы второе формальное разложение (7.1.38) при том же значении $k=1$, то получили бы

следующие уравнения для определения g_m :

$$g_0'^2 + q_0 = 0, \quad (7.1.46)$$

$$2g_0'g_m' + q_m + \sum_{s=1}^{m-1} g_s'g_{m-s}' + g_{m-1}'' = 0 \quad \text{для } m \geq 1. \quad (7.1.47)$$

Решение уравнения (7.1.46) задается равенством (7.1.42). Уравнения (7.1.47) при $m=1$ задают уравнение

$$2g_0'g_1' + q_1 + g_0'' = 0,$$

решением которого является функция

$$g_1 = - \int \frac{q_1(x)}{2g_0'(x)} dx - \frac{1}{2} \ln g_0'. \quad (7.1.48)$$

Подставив выражения для g_0 и g_1 в (7.1.38), получим в точности соотношения (7.1.44) и (7.1.45).

7.1.5. Малый параметр при старшей производной

В этом пункте мы будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \quad (7.1.49)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Асимптотические разложения решений этого уравнения были получены в п.4.1.3 с помощью метода сращивания асимптотических разложений, в п.4.2.2 — с помощью метода составных разложений и в п.6.4.2 — с помощью метода многих масштабов.

Используя преобразование (Голдстейн [1969])

$$y = v(x) \exp \left[-\frac{M(x)}{2\varepsilon} \right], \quad M = \int_{x_0}^x p(x) dx, \quad (7.1.50)$$

приведем уравнение (7.1.49) к нормальному виду

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \left(\frac{p^2}{4\varepsilon^2} + \frac{p' - 2q}{2\varepsilon} \right) v = \frac{r}{\varepsilon} e^{M/2\varepsilon}. \quad (7.1.51)$$

При $r \equiv 0$ уравнение (7.1.51) принимает вид (7.1.35), (7.1.36), в котором $k=1$, $\lambda=1/2\varepsilon$, $q_0 = -p^2$ и $q_1 = 2q - p'$. Следовательно, частное решение уравнения (7.1.51) имеет вид

$$v_c = \frac{c_1 e^{\beta(x)} + c_2 e^{-\beta(x)}}{\sqrt{p(x)}} [1 + O(\varepsilon)], \quad (7.1.52)$$

где

$$\beta(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0}^x p(x) \left[1 + \varepsilon \frac{p' - 2q}{p^2} \right] dx = \frac{M}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln p - \int_{x_0}^x \frac{q(x)}{p(x)} dx. \quad (7.1.53)$$

Приближенное частное решение уравнения (7.1.49) можно получить, положив $\varepsilon = 0$. Прделав это, получим

$$y_p = \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{\rho} dx, \quad E = \exp \int_{x_0}^x \frac{q}{\rho} dx. \quad (7.1.54)$$

Следовательно, в первом приближении имеем

$$y = \frac{c_1}{E} + \frac{c_2 E}{\rho} e^{-M/\varepsilon} + \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{\rho} dx. \quad (7.1.55)$$

Высшие приближения можно получить, предположив, что разложение имеет вид

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(x) e^{-M/\varepsilon} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_n(x), \quad (7.1.56)$$

где

$$A_0 = \frac{c_2 E}{\rho}, \quad B_0 = \frac{c_1}{E} + \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{\rho} dx. \quad (7.1.57)$$

Разложение такого же вида мы предполагали и в п.4.2.2, в котором применялся метод составных разложений. Тогда мы определяли величины M , A_n и B_n подстановкой разложения в исходное уравнение и приравниванием нулю коэффициентов при ε^n и $\varepsilon^n \exp(-M/\varepsilon)$.

Для случая $\rho = \rho(x, \varepsilon)$ и $q = q(x, \varepsilon)$ Вазов ([1965], глава 7) взял асимптотическое разложение вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \exp \left[\int \lambda_1(x, \varepsilon) dx \right] + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \exp \left[\int \lambda_2(x, \varepsilon) dx \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n(x), \quad (7.1.58)$$

где λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\varepsilon \lambda^2 + \rho(x, \varepsilon) \lambda + q(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.1.59)$$

Таким образом, если ρ и q не зависят от ε , то $\lambda_1 = -\rho/\varepsilon$, $\lambda_2 = 0$, а равенство (7.1.58) принимает вид (7.1.56).

7.1.6. Однородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами

В этом пункте мы рассматриваем уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho(\varepsilon x; \varepsilon) \frac{dy}{dx} + q(\varepsilon x; \varepsilon) y = 0, \quad (7.1.60)$$

где ε — малый параметр и

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\xi); \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n q_n(\xi), \quad \xi = \varepsilon x. \quad (7.1.61)$$

Асимптотическое разложение общего решения уравнения (7.1.60) имеет вид (историю вопроса и литературу см. Фещенко, Шкилев и Николенко [1967])

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\xi) e^{\theta_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_n(\xi) e^{\theta_2}, \quad (7.1.62)$$

где

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \lambda_i(\xi), \quad (7.1.63)$$

а λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\lambda^2 + p_0(\xi)\lambda + q_0(\xi) = 0. \quad (7.1.64)$$

Предполагаем, что на рассматриваемом интервале λ_1 и λ_2 различны. Величины θ_i и ξ в (7.1.62) предполагаются независимыми. Это эквивалентно методу многих масштабов, описанному в предыдущей главе. Производные преобразуются в соответствии с равенствами

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + 2\varepsilon \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \xi} + 2\varepsilon \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \xi} + \\ &\quad + \varepsilon \lambda_1' \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \varepsilon \lambda_2' \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \end{aligned}$$

где $\lambda_i' = d\lambda_i/d\xi$.

Обозначим через A и B коэффициенты при $\exp(\theta_1)$ и $\exp(\theta_2)$. Подставив (7.1.62) в (7.1.60) и приравняв нулю коэффициенты при $\exp(\theta_i)$, получим

$$(\lambda_1^2 + \lambda_1 p + q) A + \varepsilon (2\lambda_1 + p) A' + \varepsilon \lambda_1' A + \varepsilon^2 A'' = 0, \quad (7.1.65)$$

$$(\lambda_2^2 + \lambda_2 p + q) B + \varepsilon (2\lambda_2 + p) B' + \varepsilon \lambda_2' B + \varepsilon^2 B'' = 0. \quad (7.1.66)$$

Положив в уравнениях (7.1.65) и (7.1.66) вновь

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_n \quad (7.1.67)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для последовательного определения A_n и B_n . Первые

члены A_0 и B_0 задаются уравнениями

$$(2\lambda_1 + p_0) A'_0 + (\lambda'_1 + \lambda_1 p_1 + q_1) A_0 = 0, \quad (7.1.68)$$

$$(2\lambda_2 + p_0) B'_0 + (\lambda'_2 + \lambda_2 p_1 + q_1) B_0 = 0. \quad (7.1.69)$$

Решения этих уравнений представляются в виде

$$A_0, B_0 \propto \exp - \int \frac{\lambda'_i + \lambda_i p_1 + q_1}{2\lambda_i + p_0} d\xi. \quad (7.1.70)$$

В случае $p \equiv 0$ и $q_n = 0$ для $n \geq 1$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i [q_0(\xi)]^{1/2},$$

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad B_0 = \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где a и b — постоянные. Поэтому в первом приближении имеет место

$$y = \frac{c_1 \cos \int [q_0(\xi)]^{1/2} dx + c_2 \sin \int [q_0(\xi)]^{1/2} dx}{[q_0(\xi)]^{1/4}}. \quad (7.1.71)$$

Это есть приближение Лиувилля — Грина или ВКБ-приближение к решению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q_0(x) y = 0. \quad (7.1.72)$$

7.1.7. Динамика входа снаряда

Комплексный угол атаки симметричного снаряда описывается уравнением (Найфэ [1969a])

$$\delta + \left[ip(1 + \gamma) + \frac{\dot{u}}{u} + \frac{\varepsilon Q}{u} - \varepsilon D \right] \delta +$$

$$+ \left[\gamma(p_c^2 - p^2) + ip \left(\frac{\gamma \dot{u}}{u} - \varepsilon D - \varepsilon M + \frac{\varepsilon \gamma Q}{u} \right) \right] \delta = 0. \quad (7.1.73)$$

В этом уравнении величины u , Q , D и M являются медленно меняющимися функциями времени, а p и γ — постоянные. Следовательно, оно имеет тот же вид (7.1.60) при

$$p_0 = ip(1 + \gamma), \quad p_1 = \frac{u'}{u} + \frac{Q}{u} - D,$$

$$q_0 = \gamma(p_c^2 - p^2), \quad q_1 = ip \left(\frac{\gamma u'}{u} - D - M + \frac{\gamma Q}{u} \right). \quad (7.1.74)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени $\xi = \varepsilon t$, в то время как точка означает дифференцирование по

быстрому времени t . Подставив p_0 и q_0 в (7.1.64), получим

$$\lambda^2 + ip(1+\gamma)\lambda + \gamma(p_c^2 - p^2) = 0. \quad (7.1.75)$$

Следовательно,

$$\lambda = -\frac{1}{2}i(1+\gamma)p \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\gamma)^2 p^2 + \gamma p_c^2}. \quad (7.1.76)$$

Тогда с помощью (7.1.70) получаем

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{\omega u}} e^{-\Lambda + \Delta\Lambda}, \quad B_0 = \frac{b}{\sqrt{\omega u}} e^{-\Lambda - \Delta\Lambda}, \quad (7.1.77)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int (Q/u - D) d\xi, \quad \Delta\Lambda = \frac{p}{4} \int \frac{\left(\frac{u'}{u} + Q - \gamma D\right)(1-\gamma) + 2M}{\omega} d\xi. \quad (7.1.78)$$

Поэтому в первом приближении имеет место

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\omega u}} \left\{ a \exp \left[-\Lambda + \Delta\Lambda - \frac{1}{2}i(1+\gamma)p + i\omega \right] + \right. \\ \left. + b \exp \left[-\Lambda - \Delta\Lambda - \frac{1}{2}i(1+\gamma)p - i\omega \right] \right\}. \quad (7.1.79)$$

В числе других авторов динамика снаряда исследована Фаулером и др. [1920], Фаулером и Локом [1921], Грином и Уивером [1961], Мерфи [1963] и Коукли [1968].

7.1.8. Неоднородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами

В этом пункте мы рассматриваем асимптотическое разложение общего решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(\xi, \varepsilon) \frac{dy}{dx} + q(\xi, \varepsilon) y = r(\xi, \varepsilon) e^{iq(x, \varepsilon)}, \quad (7.1.80)$$

где

$$\frac{d\varphi}{dx} = \omega(\xi), \quad \xi = \varepsilon x, \quad (7.1.81)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\xi), \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n q_n(\xi), \quad r = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n r_n(\xi). \quad (7.1.82)$$

Следует различать два случая в зависимости от значений $i\omega$ и корней λ_1 и λ_2 уравнения

$$\lambda^2 + p_0 \lambda + q_0 = 0. \quad (7.1.83)$$

Если в одной или более точках рассматриваемого интервала имеет место равенство $i\omega = \lambda_1$ или λ_2 , то говорим о резонансном случае; в противном случае имеет место нерезонансный случай. Сначала рассмотрим последний из случаев.

Нерезонансный случай. В этом случае будем предполагать, что

$$y = A(\xi, \varepsilon) e^{\theta_1} + B(\xi, \varepsilon) e^{\theta_2} + C(\xi, \varepsilon) e^{i\varphi}, \quad (7.1.84)$$

где

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \lambda_i(\xi). \quad (7.1.85)$$

Уравнения для A и B совпадают с уравнениями (7.1.65) и (7.1.66). Для того чтобы найти C , примем в (7.1.80) $y = C \exp(i\varphi)$ и, приравняв в обеих частях коэффициенты при $\exp(i\varphi)$, получим

$$(-\omega^2 + i\omega\rho + q)C + \varepsilon(2i\omega + \rho)C' + i\varepsilon\omega' C + \varepsilon^2 C'' = r. \quad (7.1.86)$$

Положив в (7.1.86)

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_n(\xi) \quad (7.1.87)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для последовательного определения c_n . Первый из коэффициентов задается равенством

$$c_0 = \frac{r_0}{-\omega^2 + i\omega\rho_0 + q_0} = \frac{r_0}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)}. \quad (7.1.88)$$

Решения для A и B те же, что в п. 7.1.6. Поэтому в первом приближении будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} y = & a \exp \left[\theta_1 - \int \frac{\lambda'_1 + \lambda_1 \rho_1 + q_1}{2\lambda_1 + \rho_0} d\xi \right] + \\ & + b \exp \left[\theta_2 - \int \frac{\lambda'_2 + \lambda_2 \rho_1 + q_1}{2\lambda_1 + \rho_0} d\xi \right] + \\ & + \frac{r_0}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (7.1.89)$$

где a и b — постоянные.

Резонансный случай. Разложение (7.1.89) нарушается, как только величина $i\omega$ станет равной λ_1 либо λ_2 в одной или более точках, поскольку в таких точках последний член становится неограниченным. Предположим, что $i\omega$ равно λ_1 в одной или более точках, в то же время $i\omega \neq \lambda_2$ на рассматриваемом интервале. Асимптотические разложения, пригодные в этом случае, были получены Фаулером и др. [1920], Фаулером и Локом [1921].

В рассматриваемом случае частное решение имеет вид

$$y = \eta(x, \varepsilon) e^{i\varphi}, \quad (7.1.90)$$

где

$$\frac{d\eta}{dx} = [G(\xi, \varepsilon) - i\omega] \eta + H(\xi, \varepsilon). \quad (7.1.91)$$

Подставив (7.1.90) и (7.1.91) в (7.1.80) и приравняв в обеих частях коэффициенты при каждом из выражений $\eta \exp(i\varphi)$ и $\exp(i\varphi)$, получим

$$G^2 + pG + q + \varepsilon G' = 0, \quad (7.1.92)$$

$$(G + p + i\omega) H + \varepsilon H' = r. \quad (7.1.93)$$

Полагая в (7.1.92) и (7.1.93)

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G_n(\xi), \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n(\xi) \quad (7.1.94)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для последовательного определения G_n и H_n . Первые два члена определяются с помощью уравнений

$$G_0^2 + p_0 G_0 + q_0 = 0, \quad (7.1.95)$$

$$2G_0 G_1 + p_0 G_1 + p_1 G_0 + q_1 + G'_0 = 0, \quad (7.1.96)$$

$$(G_0 + p_0 + i\omega) H_0 = r_0, \quad (7.1.97)$$

$$(G_0 + p_0 + i\omega) H_1 + (G_1 + p_1) H_0 + H'_0 = r_1. \quad (7.1.98)$$

Из уравнения (7.1.95) видно, что $G_0 = \lambda_1$ либо λ_2 . Мы примем $G_0 = \lambda_1$, потому что по предположению λ_1 становится равным $i\omega$ в одной или более точках. Из уравнения (7.1.96) получаем

$$G_1 = -\frac{p_1 G_0 + G'_0 + q_1}{2G_0 + p_0}. \quad (7.1.99)$$

Решения уравнений (7.1.97) и (7.1.98) имеют вид

$$H_0 = \frac{r_0}{(G_0 + p_0 + i\omega)}, \quad H_1 = \frac{r_1 - (G_1 + p_1) H_0 - H'_0}{G_0 + p_0 + i\omega}. \quad (7.1.100)$$

Тогда общим решением уравнения (7.1.81) будет функция

$$y = A(\xi, \varepsilon) e^{\theta_1} + B(\xi, \varepsilon) e^{\theta_2} + \eta(x, \varepsilon) e^{i\varphi}, \quad (7.1.101)$$

где A и B определены в п. 7.1.6.

Частное решение уравнения (7.1.80) можно получить с помощью следующей методики, отличной от методики, использованной в п. 7.1.6. Будем предполагать, что существует решение

вида

$$y_c = \xi(x, \varepsilon), \quad \frac{d\xi}{dx} = F(\xi, \varepsilon)\xi. \quad (7.1.102)$$

Подставив (7.1.102) в однородную часть уравнения (7.1.80), получим

$$F^2 + pF + q + \varepsilon F' = 0. \quad (7.1.103)$$

Положив в (7.1.103)

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(\xi) \quad (7.1.104)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для определения F_n . Первые два из этих уравнений имеют вид

$$F_0^2 + p_0 F_0 + q_0 = 0, \quad (7.1.105)$$

$$2F_0 F_1 + p_0 F_1 + p_1 F_0 + q_1 + F_0' = 0. \quad (7.1.106)$$

Так же как и уравнение (7.1.64), уравнение (7.1.105) имеет два корня λ_1 и λ_2 . Тогда уравнение (7.1.106) дает

$$F_1 = -\frac{p_1 \lambda_i + q_1 + \lambda_i'}{2\lambda_i + p_0}. \quad (7.1.107)$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi}{dx} = \left[\lambda_i - \varepsilon \frac{p_1 \lambda_i + q_1 + \lambda_i'}{2\lambda_i + p_0} + O(\varepsilon^2) \right] \xi. \quad (7.1.108)$$

Интегрируя (7.1.108), замечаем, что y_c имеет тот же вид, что и решение, полученное в п. 7.1.6. Предлагаемый метод разложения совпадает с тем, который определяется соотношением (7.1.38).

7.1.9. Последовательные приближения Лиувилля — Грина (ВКБ-приближения)

Для получения высших приближений к решению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2(\varepsilon x) y = 0 \quad (7.1.109)$$

при малых ε Имаи [1948] предложил использовать последовательные преобразования Лиувилля — Грина (ВКБ-преобразования). Итак, введем в рассмотрение преобразование

$$dx_1 = k(\varepsilon x) dx, \quad y_1 = [k(\varepsilon x)]^{1/2} y(x), \quad (7.1.110)$$

которое преобразует уравнение (7.1.109) к виду

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} + k_1^2 y_1 = 0, \quad (7.1.111)$$

где

$$k_1^2 = 1 - \frac{1}{2k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{4k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2. \quad (7.1.112)$$

Поскольку k меняется медленно при изменении x , то можно считать, что $k_1^2 \approx 1$. Тогда приближенное решение уравнения (7.1.111) имеет вид

$$y_1 = a \cos x_1 + b \sin x_1, \quad (7.1.113)$$

где a и b — постоянные. Следовательно, первым приближением к решению уравнения (7.1.109) является функция

$$y = \frac{a \cos \int k dx + b \sin \int k dx}{k^{1/2}}. \quad (7.1.114)$$

Для нахождения второго приближения к y заметим, что уравнение (7.1.111) имеет вид (7.1.109). Тогда уточненное решение уравнения (7.1.111) можно получить, рассмотрев преобразования

$$dx_2 = k_1 dx_1 \approx \left[1 - \frac{1}{4k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{8k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right] k dx, \quad (7.1.115)$$

$$y_2 = y_1 \sqrt{k_1} \approx y_1 \left[1 - \frac{1}{8k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{16k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right]. \quad (7.1.116)$$

Уравнение (7.1.111) при этом приведет к виду

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} + k_2^2 y_2 = 0, \quad (7.1.117)$$

где

$$k_2^2 = 1 - \frac{1}{2k_1^3} \frac{d^2 k_1}{dx_1^2} + \frac{3}{4k_1^4} \left(\frac{dk_1}{dx_1} \right)^2. \quad (7.1.118)$$

Поскольку $dk_1/dx_1 = k^{-1}(dk_1/dx) = O(\varepsilon)$, то последние два члена в (7.1.118) малы по сравнению с 1, и, следовательно, первое приближение к y_2 имеет вид

$$y_2 = a \cos x_2 + b \sin x_2. \quad (7.1.119)$$

Поэтому второе приближение к y задается равенством

$$y = \frac{1 + \frac{1}{8k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} - \frac{3}{16k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2}{k^{1/2}} (a \cos x_2 + b \sin x_2), \quad (7.1.120)$$

где

$$x_2 = \int \left[1 - \frac{1}{4k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{8k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right] k dx. \quad (7.1.121)$$

Аналогичным образом могут быть получены высшие приближения введением новых преобразований вида

$$dx_{n+1} = k_n dx_n, \quad y_{n+1} = \sqrt{k_n} y_n. \quad (7.1.122)$$

7.2. Системы обыкновенных уравнений первого порядка

В этом параграфе мы рассмотрим сначала асимптотические решения уравнений в окрестности бесконечно удаленной иррегулярной особой точки. Затем обсудим уравнения с малым или большим параметром. Наконец, опишем асимптотические разложения для уравнений с медленно меняющимися коэффициентами.

7.2.1. Разложения в окрестности иррегулярной особой точки

Рассмотрим поведение системы n линейных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = x^q A(x)y \quad (7.2.1)$$

при $x \rightarrow \infty$. Здесь q — целое число, $q \geq -1$, а матрица представима в виде

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.2.2)$$

При $q = -1$ точка $x = \infty$ является регулярной особой точкой системы (7.2.1), при $q > -1$ — иррегулярной особой точкой. Поведение решения в окрестности иррегулярной особенности зависит от того, будут ли все собственные значения матрицы A_0 различными или нет. В этом пункте будем рассматривать случай различных собственных значений.

Скалярное уравнение вида (7.2.1) может быть решено явно, и решение его имеет вид

$$y(x) = U(x) x^{GQ(x)}, \quad (7.2.3)$$

где G , — вообще говоря, комплексная постоянная, а $Q(x)$ — полином относительно x вида

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } q = -1, \\ \sum_{m=1}^{q+1} Q_m x^m, & \end{cases} \quad (7.2.4)$$

и, далее,

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m x^{-m}. \quad (7.2.5)$$

В случае системы уравнений асимптотическое решение опять-таки имеет вид (7.2.3), в котором величины G , Q_m и U_m являются постоянными матрицами. Томе [1883] назвал такое разложение нормальным решением.

Для отыскания асимптотических разложений решений системы (7.2.1) и (7.2.2) зададимся формальным решением вида

$$y = u(x) x^\sigma e^{\Lambda(x)}, \quad (7.2.6)$$

где σ — постоянная, а $\Lambda(x)$ имеет вид

$$\Lambda(x) = \frac{\lambda_{q+1} x^{q+1}}{q+1} + \frac{\lambda_q x^q}{q} + \dots + \lambda_1 x, \quad (7.2.7)$$

причем $\lambda_{-m} = 0$ при $m \geq 0$ и, наконец,

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m x^{-m} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (7.2.8)$$

Здесь Λ — скаляр, а y и u — векторы-столбцы. Подставив (7.2.6) — (7.2.8) в (7.2.1) и (7.2.2) и приравняв коэффициенты при равных степенях x , получим уравнения для последовательного определения λ_n , σ и u_n . Первое уравнение имеет вид

$$(A_0 - \lambda_{q+1} I) u_0 = 0, \quad (7.2.9)$$

где I — единичная матрица. Для существования нетривиального решения системы (7.2.9) детерминант ее должен обратиться в нуль. Из этого условия получаем следующее алгебраическое уравнение n -го порядка:

$$|A_0 - \lambda_{q+1} I| = 0. \quad (7.2.10)$$

Если собственные значения матрицы A_0 различны, то уравнение (7.2.10) определяет n различных значений для λ_{q+1} , которые соответствуют n линейно независимым решениям вида (7.2.6).

7.2.2. Асимптотическое разбиение систем уравнений

Сибуя [1958] развил методику упрощения системы уравнений (7.2.1) путем сведения ее к некоторым дифференциальным уравнениям специального вида, которые могут быть решены легче, чем исходная система. Суть этой методики в следующем. Положим

$$y = P(x) v(x), \quad (7.2.11)$$

где P — неособая матрица размером $(n \times n)$, подлежащая определению, v — вектор-столбец. Уравнение (7.2.1), следовательно, преобразуется к виду

$$\frac{dv}{dx} = x^q B(x) v, \quad (7.2.12)$$

где

$$B(x) = [P(x)]^{-1} \left[A(x) P(x) - x^{-q} \frac{dP(x)}{dx} \right],$$

откуда получаем

$$\frac{dP(x)}{dx} = x^q [A(x)P(x) - P(x)B(x)]. \quad (7.2.13)$$

Суть методики состоит в отыскании такой матрицы $P(x)$, чтобы матрица $B(x)$ имела каноническую жорданову форму. Положим с этой целью

$$B = \sum_{m=0}^{\infty} B_m x^{-m} \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (7.2.14)$$

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} P_m x^{-m} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Здесь B_m — матрицы в канонической жордановой форме.

Подставив (7.2.14) в (7.2.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0, \quad (7.2.15)$$

$$A_0 P_m - P_m B_0 = \sum_{s=0}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - (m - q - 1) P_{m-q-1} \quad (7.2.16)$$

для $m \geq 1$, причем при $m - q - 1 < 0$ имеем $P_{m-q-1} = 0$. Если матрица A_0 имеет различные собственные значения, то P_0 можно выбрать таким образом, чтобы матрица

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 \quad (7.2.17)$$

была диагональной. Помножив уравнение (7.2.16) слева на P_0^{-1} , получим

$$B_0 W_m - W_m B_0 = B_m + F_m, \quad (7.2.18)$$

где

$$W_m = P_0^{-1} P_m, \quad (7.2.19)$$

$$F_m = -P_0^{-1} A_m P_0 + P_0^{-1} \sum_{s=1}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - (m - q - 1) W_{m-q-1}. \quad (7.2.20)$$

Обозначив через F_m^{ij} компоненты матрицы F_m , выберем матрицу B_m следующим образом:

$$B_m^{ii} = -F_m^{ii}, \quad B_m^{ij} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (7.2.21)$$

Поскольку матрица B_0 имеет различные собственные значения, то из системы (7.2.18), (7.2.21) может быть найдена матрица W_m и, следовательно, матрица P_m из системы (7.2.19).

В случае кратных собственных значений разбиение системы уравнений на более простые системы проводится по той же схеме. Предположим, что матрица A_0 имеет кратные собственные значения и что существует матрица P_0 , такая, что

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 = \begin{pmatrix} B_0^{11} & 0 \\ 0 & B_0^{22} \end{pmatrix}, \quad (7.2.22)$$

причем матрица B_0^{11} имеет собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, r$), а матрица B_0^{22} — собственные значения λ_j ($j = r+1, r+2, \dots, n$), такие, что $\lambda_i \neq \lambda_j$. Проведем разбиение матриц W_m и F_m в соответствии с равенствами

$$W_m = \begin{pmatrix} W_m^{11} & W_m^{12} \\ W_m^{21} & W_m^{22} \end{pmatrix}, \quad F_m = \begin{pmatrix} F_m^{11} & F_m^{12} \\ F_m^{21} & F_m^{22} \end{pmatrix}, \quad (7.2.23)$$

где W_m^{11} и F_m^{11} — матрицы размером $(r \times r)$, а W_m^{22} и F_m^{22} — размером $((n-r) \times (n-r))$. Выберем

$$W_m^{11} = W_m^{22} = 0, \quad B_m^{11} = -F_m^{11}, \quad B_m^{22} = -F_m^{22}. \quad (7.2.24)$$

Тогда уравнение (7.2.18) примет вид

$$\begin{aligned} B_0^{11} W_m^{12} - W_m^{12} B_0^{22} &= F_m^{12}, \\ B_0^{22} W_m^{21} - W_m^{21} B_0^{11} &= F_m^{21}. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

Эти уравнения решаются единственным образом относительно W_m^{12} и W_m^{21} , поскольку у матриц B_0^{11} и B_0^{22} нет общих собственных значений.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0. \quad (7.2.26)$$

Полагая

$$y = u_1, \quad \frac{dy}{dx} = u_2, \quad (7.2.27)$$

приведем уравнение (7.2.26) к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= A(x) u, \\ u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{n^2}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2.28)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $q=0$, $A_m=0$ для $m > 2$ и

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2.29)$$

Поскольку собственными значениями A_0 являются $\pm i$, то, положив

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad P_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.2.30)$$

получим

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (7.2.31)$$

Тогда из (7.2.20) получаем

$$F_1 = -P_0^{-1} A_1 P_0 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.2.32)$$

Из (7.2.21) и (7.2.25) получаем

$$B_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2.33)$$

Поскольку W_1 и B_1 известны, то из (7.2.20) следует

$$F_2 = -\frac{i}{8} \begin{pmatrix} -1-4n^2 & 2-4n^2 \\ -2+4n^2 & 1+4n^2 \end{pmatrix}. \quad (7.2.34)$$

Следовательно,

$$B_2 = -\frac{i(1+4n^2)}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = -\frac{1-2n^2}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2.35)$$

Подставив выражения для B_0 , B_1 и B_2 в (7.2.12), получим

$$\frac{dv}{dx} = \left[i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i(1+4n^2)}{8x^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + O(x^{-3}) \right] v.$$

Имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a}{\sqrt{x}} \exp \left[ix + i \frac{1+4n^2}{8x} + O(x^{-2}) \right], \\ v_2 &= \frac{b}{\sqrt{x}} \exp \left[-ix - i \frac{1+4n^2}{8x} + O(x^{-2}) \right], \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

где a и b — постоянные. Имеем для матрицы P

$$P = P_0 + \frac{1}{x} P_1 + O(x^{-2}) = P_0 \left(I + \frac{1}{x} W_1 \right) + O(x^{-2}),$$

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{4x} \\ -\frac{i}{4x} & 1 \end{pmatrix} + O(x^{-2}) = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{4x} & 1 + \frac{i}{4x} \\ i - \frac{1}{4x} & -i - \frac{1}{4x} \end{pmatrix} + O(x^{-2}). \quad (7.2.37)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 u &= Pv = \frac{a}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{4x} \\ i - \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \exp \left(ix + i \frac{1+4n^2}{8x} \right) + \\
 &+ \frac{b}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{4x} \\ -i - \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \exp \left(-ix - i \frac{1+4n^2}{8x} \right) + O(x^{-5/2}). \quad (7.2.38)
 \end{aligned}$$

Отметим, что матрица P_2 не использована в (7.2.37) и (7.2.38), поскольку погрешность для v имеет порядок $O(x^{-5/2})$. Для сравнения этих результатов с результатами, полученными в п. 7.1.2, разложим $\exp[\pm i(1+4n^2)/8x]$ по степеням x^{-1} . Поскольку для решения y

$$\begin{aligned}
 y &= u_1 = \frac{a}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{i}{4x} \right) \exp \left(ix + i \frac{1+4n^2}{8x} \right) + \\
 &+ \frac{b}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{i}{4x} \right) \exp \left(-ix - i \frac{1+4n^2}{8x} \right) + O(x^{-5/2}),
 \end{aligned}$$

то

$$y = \frac{a}{\sqrt{x}} \left(1 - i \frac{1-4n^2}{8x} \right) e^{ix} + \frac{b}{\sqrt{x}} \left(1 + i \frac{1-4n^2}{8x} \right) e^{-ix} + O(x^{-5/2}), \quad (7.2.39)$$

что согласуется с (7.1.14) при $n=0$. Высшие приближения могут быть получены непосредственным (и довольно утомительным) вычислением дальнейших значений B_m и W_m . Методика, использованная в п. 7.1.2, несравненно более проста в применении, чем методика, описанная в этом пункте.

7.2.3. Субнормальные решения

Если матрица A_0 из системы (7.2.1) имеет кратные собственные значения, то не удастся разбить все уравнения на группы выбором диагональной матрицы B . Вместо этого мы проведем

такое разбиение системы уравнений, чтобы получить более простые системы вида

$$\frac{dv_i}{dx} = x^q B^i(x) v^i, \quad B^i = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^i x^{-m}, \quad (7.2.40)$$

где собственные значения λ_i матрицы B_0^i отличны от собственных значений λ_j матрицы B_0^j при $i \neq j$. Таким образом, величина B_m^i , соответствующая отдельному собственному значению λ_m^i , является скаляром, и уравнение (7.2.40) может быть решено. При $q=0$ имеем

$$v^m = a x^{B_1^m} e^{B_0^m x} \left[1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{c_r}{r-1} x^{-r+1} \right], \quad (7.2.41)$$

где a — постоянная, а c_r выражаются через B_r^m для $r \geq 2$. Следовательно, существует нормальное решение, соответствующее этому собственному значению исходной системы (7.2.1). Для собственных значений кратности λ_s матрица B^s имеет ранг m_s . Может оказаться, что приведенная система m_s уравнений, а следовательно, и исходная система не имеют нормального решения, соответствующего этому собственному значению. Однако она может иметь так называемое субнормальное решение вида (7.2.3)—(7.2.5), в котором Q и U разложены по степеням $x^{1/r}$, где r — целое число.

Приведем в качестве примера уравнение

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16x} \right) y = 0, \quad (7.2.42)$$

которое имеет общее решение

$$y = a e^{V\sqrt{x}} (x^{-3/4} - x^{-5/4}) + b e^{-V\sqrt{x}} (x^{-3/4} + x^{-5/4}), \quad (7.2.43)$$

состоящее из двух субнормальных решений. Уравнение (7.2.42) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= A u, \quad u = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4x} + \frac{5}{16x^2} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2.44)$$

В этом случае нормального решения не существует, потому что матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственное значение $\lambda=0$ кратности два.

7.2.4. Системы, содержащие параметр

Рассмотрим систему n линейных уравнений

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y, \quad (7.2.45)$$

где ε — малое положительное число, h — целое число, $A(x, \varepsilon)$ — матрица размером $(n \times n)$, допускающая асимптотическое разложение вида

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m A_m(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.2.46)$$

При h , отрицательном или равном нулю, y представляется асимптотическим разложением

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m(x). \quad (7.2.47)$$

При $h > 0$ асимптотические разложения решений системы (7.2.45) зависят от того, имеет ли матрица $A_0(x)$ различные на всем рассматриваемом интервале собственные значения. Точка, в которой матрица $A_0(x)$ имеет кратные собственные значения, называется точкой возврата или перехода. Задачи с точкой возврата рассматриваются в § 7.3.

Если собственные значения матрицы $A_0(x)$ различны, то асимптотическое представление n линейно независимых решений системы (7.2.45) имеет вид

$$y = u(x, \varepsilon) \exp \left[\int \lambda(x, \varepsilon) dx \right], \quad (7.2.48)$$

где

$$\lambda(x, \varepsilon) = \sum_{r=1}^h \varepsilon^{-r} \lambda_r(x), \quad (7.2.49)$$

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r(x). \quad (7.2.50)$$

Подставив (7.2.48) — (7.2.50) в (7.2.45) и (7.2.46) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения, из которых последовательно определяются λ_r и u_r . Существуют n линейно независимых решений вида (7.2.48) — (7.2.50), соответствующих n собственным значениям матрицы $A_0(x)$, т. е. решениям уравнения

$$|A_0(x) - \lambda_0(x) I| = 0. \quad (7.2.51)$$

7.2.5. Однородные системы с медленно меняющимися коэффициентами

В этом пункте будем рассматривать асимптотические решения системы

$$\frac{dy}{dx} = A(\xi, \varepsilon) y, \quad \xi = \varepsilon x, \quad (7.2.52)$$

где

$$A(\xi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m A_m(\xi) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.2.53)$$

В этой задаче x — быстрая, а ξ — медленная переменные.

Как и в п. 7.2.2, предположим, что существует неособая матрица $P_0(\xi)$, такая, что

$$B_0(\xi) = P_0^{-1}(\xi) A_0(\xi) P_0(\xi) = \begin{pmatrix} B_0^{11}(\xi) & 0 \\ 0 & B_0^{22}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (7.2.54)$$

где матрица B_0^{11} имеет собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, r$), а матрица B_0^{22} — собственные значения λ_j ($j = r+1, r+2, \dots, n$), причем $\lambda_i \neq \lambda_j$. В этом случае исходную объединенную систему уравнений (7.2.52) можно свести к двум несвязанным системам порядков r и $n-r$. С этой целью рассмотрим преобразование

$$y(x, \varepsilon) = P(\xi, \varepsilon) v(x, \varepsilon), \quad (7.2.55)$$

которое приводит систему (7.2.52) к виду

$$\frac{dv}{dx} = B(\xi, \varepsilon) v, \quad (7.2.56)$$

где матрица P удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP}{dx} = AP - PB,$$

или

$$\varepsilon \frac{dP}{d\xi} = A(\xi, \varepsilon) P(\xi, \varepsilon) - P(\xi, \varepsilon) B(\xi, \varepsilon). \quad (7.2.57)$$

Будем искать асимптотические представления матриц P и B вида

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m P_m(\xi), \quad B = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m B_m(\xi), \quad (7.2.58)$$

где B_m — блочные диагональные матрицы. Подставив (7.2.58) в (7.2.57) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned} A_0 P_0 - P_0 B_0 &= 0, \\ A_0 P_m - P_m B_0 &= P_0 B_m + \tilde{F}_m, \end{aligned} \quad (7.2.59)$$

где

$$\tilde{F}_m = \sum_{s=1}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - A_m P_0 + \frac{dP_{m-1}}{d\xi}. \quad (7.2.60)$$

Выбирая матрицы B_0 и P_0 в соответствии с (7.2.54), умножим, как и в п. 7.2.2, второе из уравнений (7.2.59) слева на P_0^{-1} и, используя (7.2.19), получим

$$B_0 W_m - W_m B_0 = B_m + F_m, \quad (7.2.61)$$

где

$$W_m = P_0^{-1} P_m, \quad F_m = P_0^{-1} \tilde{F}_m. \quad (7.2.62)$$

Чтобы решить систему (7.2.61), рассмотрим разбиение матриц F_m и W_m вида

$$F_m = \begin{pmatrix} F_m^{11} & F_m^{12} \\ F_m^{21} & F_m^{22} \end{pmatrix}, \quad W_m = \begin{pmatrix} W_m^{11} & W_m^{12} \\ W_m^{21} & W_m^{22} \end{pmatrix}, \quad (7.2.63)$$

где F_m^{11} и W_m^{11} — матрицы размером $(r \times r)$. Положив

$$W_m^{11} = W_m^{22} = 0, \quad B_m^{11} = -F_m^{11}, \quad B_m^{22} = -F_m^{22}, \quad (7.2.64)$$

приведем систему (7.2.61) к виду

$$B_0^{11} W_m^{12} - W_m^{12} B_0^{22} = F_m^{12}, \quad (7.2.65)$$

$$B_0^{22} W_m^{21} - W_m^{21} B_0^{11} = F_m^{21}. \quad (7.2.66)$$

Эти уравнения разрешимы относительно W_m^{12} и W_m^{21} единственным образом, поскольку матрицы B_0^{11} и B_0^{22} не имеют общих собственных значений.

Если матрица A_0 имеет различные собственные значения, то с помощью описанной выше схемы исходную систему можно свести к системе n не связанных друг с другом уравнений вида (7.2.56) с диагональной матрицей B . Подробности вывода здесь такие же, как и в п. 7.2.2.

Более легкая методика для определения асимптотических решений системы (7.2.52) может быть использована в том случае, когда матрица A_0 имеет различные собственные значения. Асимптотическое представление имеет вид

$$y = u(\xi, \varepsilon) e^{\theta(\xi, \varepsilon)}, \quad (7.2.67)$$

где

$$u(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_s(\xi), \quad (7.2.68)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \lambda(\xi). \quad (7.2.69)$$

Здесь $\lambda(\xi)$ — собственное значение матрицы $A_0(\xi)$. Существуют n линейно независимых решений вида (7.2.67), соответствующих n собственным значениям матрицы A_0 . Подстановка (7.2.67) — (7.2.69) в (7.2.52) и (7.2.53) приводит к уравнениям для последовательного нахождения u_m .

7.3. Задачи с точкой возврата

В п.7.1.3 мы установили, что приближение Лнувилля — Грина (ВКБ-приближение) для решений уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.3.1)$$

при больших λ и положительном $q_1(x)$ имеет вид

$$y = \frac{a_1 \cos \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx + b_1 \sin \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right] \right]}{\sqrt[4]{q_1(x)}}, \quad (7.3.2)$$

а при отрицательном $q_1(x)$ — вид

$$y = \frac{a_2 \exp \left[\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right] + b_2 \exp \left[-\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{-q_1(x)}}. \quad (7.3.3)$$

Как было отмечено в п.7.1.3, эти приближения пригодны, коль скоро значения x далеки от корней функции $q_1(x)$. Из уравнений (7.3.2) и (7.3.3) видно, что решение y имеет колебательный характер по одну сторону от нуля функции $q_1(x)$ и экспоненциальный характер — по другую; отсюда и название такой точки — *переходная точка*. Ее называют также *точкой возврата*, потому что в классической механике это есть точка, в которой кинетическая энергия движущейся частицы становится равной ее потенциальной энергии, и частица меняет направление движения. Точка $x = \mu$ называется точкой возврата или переходной точкой порядка α , если точка $x = \mu$ является нулем кратности α функции $q_1(x)$.

Если функция $q_2(x)$ имеет особенность в точке возврата, то точка возврата называется особой точкой возврата; в противном случае это регулярная точка возврата. В этом пункте, начав с уравнений второго порядка, таких, как уравнение (7.3.1), дадим описание методики получения асимптотических решений в задачах с точкой возврата.

7.3.1. Метод сращения асимптотических разложений

Предположим, что $q_2(x)$ — функция без особенностей, а

$$q_1(x) = (x - \mu) f(x), \quad (7.3.4)$$

где $f(x)$ — положительная функция. Следовательно, приближенное решение уравнения (7.3.1) задается равенством (7.3.2) при $x > \mu$ и равенством (7.3.3) при $x < \mu$. Эти разложения, называемые внешними разложениями, нарушаются в окрестности точки $x = \mu$. Чтобы найти область неравномерности этих разложений, положим в (7.3.1) $\xi = (x - \mu) \lambda^v$ с положительным v и приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \{\lambda^{2-3v} \xi f[\mu + \xi \lambda^{-v}] + \lambda^{-2v} q_2[\mu + \xi \lambda^{-v}]\} y = 0. \quad (7.3.5)$$

Третий член в (7.3.5) при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к нулю для всех положительных v . Однако вид предельного уравнения зависит от значения v . При $\lambda \rightarrow \infty$ уравнение (7.3.5) имеет предельный вид

$$\begin{aligned} y &= 0 & \text{при } v < \frac{2}{3}, \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} &= 0 & \text{при } v > \frac{2}{3}, \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi f(\mu) y &= 0 & \text{при } v = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Очевидно, что первые два предела неприемлемы, поскольку с помощью их решений не удастся срастить разложения (7.3.2) и (7.3.3). Поэтому приемлемым является предел, выделенный значением $v = 2/3$ и задаваемый третьим уравнением в (7.3.6). Положив в этом уравнении

$$z = -\xi \sqrt[3]{f(\mu)}, \quad (7.3.7)$$

придем к уравнению, которое в первом порядке описывает внутреннее решение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - zy = 0. \quad (7.3.8)$$

Его общее решение имеет вид

$$y = a_3 Ai(z) + b_3 Bi(z), \quad (7.3.9)$$

где $Ai(z)$ и $Bi(z)$ — функции Эйри первого и второго родов соответственно.

Отвлечемся на миг, чтобы дать некоторые свойства функций Эйри, которые нам понадобятся в дальнейшем. Эти функции допускают следующие интегральные представления (см., напри-

мер, Эрдейи [1956], раздел (4.6):

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) dt, \quad (7.3.10)$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + zt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) \right] dt. \quad (7.3.11)$$

Эти функции выражаются также через функции Бесселя порядка $1/3$ при помощи формул

$$Ai(z) = \frac{1}{3} \sqrt{z} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3}(\zeta), \quad (7.3.12)$$

$$Bi(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)], \quad (7.3.13)$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{3} \sqrt{z} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)], \quad (7.3.14)$$

$$Bi(-z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)], \quad (7.3.15)$$

где $\zeta = (2/3)z^{3/2}$. Для больших положительных значений z эти функции имеют следующие асимптотические разложения:

$$Ai(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\zeta}, \quad (7.3.16)$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right), \quad (7.3.17)$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{\zeta}, \quad (7.3.18)$$

$$Bi(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.3.19)$$

Для того чтобы срастить внутреннее решение (7.3.9) с внешним решением (7.3.2), выразим последнее через $\xi = (x - \mu)\lambda^{2/3}$ и найдем его предел при $\lambda \rightarrow \infty$. В этом случае имеем $x > \mu$ и

$$\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau = \lambda \int_{\mu}^x \sqrt{\tau - \mu} \sqrt{f(\tau)} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} + O(\lambda^{-2/3}).$$

Следовательно,

$$y = \frac{\lambda^{1/6}}{4\sqrt{\xi f(\mu)}} \left[a_1 \cos\left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2}\right) \right] + \dots \quad (7.3.20)$$

Выразив (7.3.9) через ξ , получим

$$y = a_3 Ai(-\xi \sqrt[3]{f(\mu)}) + b_3 Bi(-\xi \sqrt[3]{f(\mu)}).$$

Используя (7.3.17) и (7.3.19), можно получить для этой функции разложение для большого

$$y = \frac{\xi^{-1/4} f^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \sin \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_3 \cos \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \dots \quad (7.3.21)$$

Принцип сращивания требует равенства (7.3.20) и (7.3.21); имеем поэтому

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \sin \frac{\pi}{4} + b_3 \cos \frac{\pi}{4} \right], \\ b_1 &= \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \cos \frac{\pi}{4} - b_3 \sin \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

Следовательно, равенство (7.3.2) принимает вид

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{q_1(x)}} \left\{ \tilde{b}_3 \cos \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] + \tilde{a}_3 \sin \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad (7.3.23)$$

где

$$(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3) = \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} (a_3, b_3).$$

Обращаясь к сращиванию (7.3.9) с внешним решением (7.3.3), заметим, что

$$\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} dt = \lambda \int_x^{\mu} \sqrt{(\mu - \tau) f(\tau)} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} + \dots$$

Равенство (7.3.3), следовательно, примет вид

$$\begin{aligned} y &= \frac{\lambda^{1/6}}{\sqrt{-f(\mu)} \xi} \left\{ a_2 \exp \left[\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + b_2 \exp \left[-\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

Поскольку в этом случае ξ — отрицательная величина, то $z = -\xi \sqrt[3]{f(\mu)}$ — величина положительная. Тогда с помощью (7.3.16)

и (7.3.18) можно получить следующее асимптотическое поведение внутреннего решения (7.3.9) при больших x :

$$y = \frac{(-\xi)^{-1/4} f^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2} a_3 \exp \left(-\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right) + b_3 \exp \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right) \right] + \dots \quad (7.3.25)$$

Приравняв (7.3.24) и (7.3.25), получим

$$(a_2, b_2) = \left(\tilde{b}_3, \frac{1}{2} \tilde{a}_3 \right). \quad (7.3.26)$$

Следовательно, внешнее решение (7.3.3) при отрицательном $q_1(x)$ имеет вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{-q_1(x)}} \left[\tilde{b}_3 \exp \left(\lambda \int_x^\mu \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right) + \frac{1}{2} \tilde{a}_3 \exp \left(-\lambda \int_x^\mu \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right) \right]. \quad (7.3.27)$$

Таким образом, приближенное решение уравнения (7.3.1) с точкой возврата $x = \mu$ задается тремя отдельными разложениями: разложением (7.3.9) — в окрестности точки возврата, разложением (7.3.23) — при $x > \mu$ и разложением (7.3.27) — при $x < \mu$. Сращивание дает связь между постоянными a_1 , b_1 и a_2 , b_2 . Впервые эта связь была получена Рэлеем [1912] в исследовании по полному отражению звуковых волн от переходного слоя; явное представление он дал только для экспоненциально затухающего решения. Ганс [1915] дал формулы связи для обоих решений; Джеффрис [1924] вновь открыл их в применении к функции Матьё. Эта связь была еще раз открыта почти в одно и то же время Вентцелем [1926], Крамерсом [1926] и Бриллюэном [1926] при исследовании уравнения Шредингера. Поэтому в физической литературе название этого метода обычно образуется из букв W , K и B ; позднее к ним стали добавлять букву J в ознаменование вклада, который внес Джеффрис.

Цваан [1929] вывел формулы связи путем интегрирования на комплексной плоскости вдоль пути, который обходил точку возврата. Этот метод развил далее Кембл [1935].

Недостатком этой методики является то обстоятельство, что решение задается тремя разными разложениями. В п. 6.4.4 с помощью метода многих масштабов было получено одно разложение, равномерно пригодное для всех x . В следующем разделе мы рассмотрим весьма эффективный метод изучения задач с точкой возврата, который был предложен Лангером [1931], [1934] и развит Лангером и рядом исследователей, см. п. 7.3.2—7.3.10.

7.3.2. Преобразование Лангера

Суть подхода Лангера состоит в использовании того обстоятельства, что приблизительно одинаковые уравнения имеют приблизительно одинаковые решения. Он понял, что любая попытка выразить в элементарных функциях асимптотические разложения решений в задачах с точкой возврата обречена на неудачу в областях, содержащих точки возврата. Поэтому разложение, равномерно пригодное для всех x , должно быть выражено в неэлементарных функциях с теми же качественными особенностями, что и у решений уравнения.

Решающим шагом в подходе Лангера является введение следующего преобразования зависимой и независимой переменных:

$$z = \varphi(x), \quad v = \psi(x)y(x), \quad (7.3.28)$$

которое приводит уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.3.29)$$

к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\varphi'^2} \left(\varphi'' - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \\ + \frac{1}{\varphi'^2} \left[\lambda^2 q_1(x) + q_2(x) - \psi \left(\frac{\psi'}{\psi^2} \right)' \right] v = 0. \end{aligned} \quad (7.3.30)$$

При условии

$$\psi = \sqrt{\varphi'} \quad (7.3.31)$$

средний член обратится в нуль, и уравнение примет вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left[\lambda^2 \frac{q_1}{\varphi'^2} + \frac{q_2}{\varphi'^2} + \frac{3}{4} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^4} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'''}{\varphi'^3} \right] v = 0. \quad (7.3.32)$$

Положив

$$\frac{q_1}{\varphi'^2} = 1 \quad \text{или} \quad \varphi = \int \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad (7.3.33)$$

мы вернемся к преобразованию Лиувилля — Грина. Получающееся при этом решение выражается, как и в п. 7.1.3, в тригонометрических функциях и имеет особенность в точках возврата (нулях функции $q_1(x)$). Из равенств $\psi = \sqrt{\varphi'}$ и $\varphi' = \sqrt{q_1}$ имеем $\psi = \sqrt[4]{q_1}$; поэтому преобразование (7.3.28) имеет особенность в нулях функции $q_1(x)$.

Для получения равномерно пригодного разложения в задаче с точкой возврата в точке $x = \mu$ и функцией $q_1(x)$ вида

$$q_1(x) = (x - \mu) f(x), \quad f(x) > 0, \quad (7.3.34)$$

положим, следуя Лангеру [1931], [1934],

$$\frac{q_1}{\varphi'^2} = \Phi. \quad (7.3.35)$$

Тогда уравнение (7.3.32) примет вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z v = \delta v, \quad (7.3.36)$$

где

$$\delta = -\frac{q_2}{\varphi'^2} - \frac{3}{4} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^4} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'''}{\varphi'^3}. \quad (7.3.37)$$

Решение уравнения (7.3.35) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \varphi^{3/2} &= \int_{\mu}^x \sqrt{(\tau - \mu) f(\tau)} d\tau \quad \text{при } x \geq \mu, \\ \frac{2}{3} (-\varphi)^{3/2} &= \int_x^{\mu} \sqrt{(\mu - \tau) f(\tau)} d\tau \quad \text{при } x \leq \mu. \end{aligned} \quad (7.3.38)$$

При $x \rightarrow \mu$ имеем $\varphi \rightarrow \sqrt[3]{f(\mu)}(x - \mu)$ и $\psi \rightarrow \sqrt[6]{f(\mu)}$; следовательно, $\delta = O(1)$, если только функция $q_2(x)$ непрерывна. Кроме того, преобразование (7.3.28) является регулярным всюду, включая точку возврата $x = \mu$. Поскольку $\delta = O(1)$, а λ — большой параметр, то функция v приближенно определяется уравнением, которое Лангер назвал присоединенным уравнением,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z v = 0. \quad (7.3.39)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = c_1 Ai(-\lambda^{2/3} z) + c_2 Bi(-\lambda^{2/3} z), \quad (7.3.40)$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Следовательно, в первом приближении

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(x)}} \{c_1 Ai[-\lambda^{2/3} \varphi(x)] + c_2 Bi[-\lambda^{2/3} \varphi(x)]\}, \quad (7.3.41)$$

где φ определено в (7.3.38).

Это — единственное разложение, равномерно пригодное для всех x , включая и окрестность точки возврата $x = \mu$. Используя асимптотические разложения (7.3.16) — (7.3.19), справедливые для больших значений аргумента функций Эйри Ai и Bi , можно

получить

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{q_1(x)}} \left\{ c_1 \sin \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ \left. + c_2 \cos \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad \text{при } x > \mu, \quad (7.3.42)$$

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{-q_1(x)}} \left\{ c_1 \exp \left[-\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right] + \right. \\ \left. + c_2 \exp \left[\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right] \right\} \quad \text{при } x < \mu. \quad (7.3.43)$$

Эти формулы согласуются с результатами предыдущего пункта.

Олвер [1954] обобщил преобразование Лангера, записав его в виде

$$y = \chi^{-1/4} v, \\ \zeta = \zeta(z) = \int^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \\ \chi = \frac{q_1(x)}{\zeta'^2}, \quad (7.3.44)$$

где независимая переменная z является пока не определенной функцией x . Это преобразование приводит уравнение (7.3.29) к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \zeta'^2 v = \delta v, \quad (7.3.45)$$

где

$$\delta = -\frac{q_2}{\chi} - \chi^{-3/4} \frac{d^2(\chi^{-1/4})}{dx^2}. \quad (7.3.46)$$

Если нам удастся подобрать функцию $\zeta(z)$ такой, чтобы имело место $\delta = O(1)$, то решения присоединенного уравнения

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \zeta'^2 v = 0 \quad (7.3.47)$$

будут асимптотически эквивалентны решениям уравнения (7.3.29) при больших λ . Чтобы δ имела порядок $O(1)$, функция χ должна быть регулярной и не обращаться в нуль на рассматриваемом интервале. Следовательно, функция ζ должна быть выбрана такой, чтобы порядок и местоположение нулей и особенностей функции ζ'^2 были такими же, как у функции $q_1(x)$, и чтобы

ζ'^2 и $q_1(x)$ были одновременно положительны или отрицательны. Кроме того, желательно ζ'^2 выбрать и таким, чтобы присоединенное уравнение (7.3.47) решалось в известных функциях. Общее преобразование такого типа было вновь открыто Моригути [1959].

Положив

$$q_1(x) = (x - \mu) f(x), \quad f(x) > 0, \quad \zeta'^2 = \pm z, \quad (7.3.48)$$

придем к преобразованию Лангера.

7.3.3. Задачи с двумя точками возврата

Рассмотрим случай, при котором

$$q_1(x) = (x - \mu_1)(\mu_2 - x)f(x), \quad \mu_2 > \mu_1, \quad f(x) > 0, \quad (7.3.49)$$

так что уравнение (7.3.29) имеет две простые точки возврата в точках $x = \mu_1$ и $x = \mu_2$. Подобные задачи с двумя точками возврата возникают, например, при решении уравнения Шредингера (см., например, Джеффрис [1962]; Пайк [1964]) для туннельного перехода или в задачах с классическим осциллятором, а также при определении переноса тепла в трубе (см., например, Джейкоб [1949], стр. 451—480).

Применив результаты предыдущего пункта к точке возврата $x = \mu_1$, получим

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1'(x)}} \{a_1 Ai[-\lambda^{2/3} \varphi_1(x)] + b_1 Bi[-\lambda^{2/3} \varphi_1(x)]\}, \quad (7.3.50)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \varphi_1^{3/2} &= \int_{\mu_1}^x \sqrt{(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{при } x > \mu_1, \\ \frac{2}{3} (-\varphi_1)^{3/2} &= \int_x^{\mu_1} \sqrt{(\mu_1 - \tau)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{при } x < \mu_1. \end{aligned} \quad (7.3.51)$$

При $x \rightarrow \mu_2$, однако, $\varphi_1' = O[(x - \mu_2)^{1/2}]$. Поэтому разложение (7.3.50) нарушается в окрестности точки $x = \mu_2$ и пригодно для значений $\mu_2 - x > \delta_2$, где δ_2 — положительная малая величина.

Применив результаты предыдущего пункта к точке возврата $x = \mu_2$, получим

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2'(x)}} \{a_2 Ai[-\lambda^{2/3} \varphi_2(x)] + b_2 Bi[-\lambda^{2/3} \varphi_2(x)]\} \quad \text{при } x - \mu_1 > \delta_1, \quad (7.3.52)$$

где δ_1 — малое положительное число и

$$\frac{2}{3} \varphi_2^{3/2} = \int_x^{\mu_2} V(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{при } x < \mu_2, \quad (7.3.53)$$

$$\frac{2}{3} (-\varphi_2)^{3/2} = \int_{\mu_1}^x V(\tau - \mu_1)(\tau - \mu_2) f(\tau) d\tau \quad \text{при } x > \mu_2.$$

Поскольку оба разложения (7.3.50) и (7.3.52) пригодны в интервале $\mu_1 + \delta_1 < x < \mu_2 - \delta_2$, то их можно срастить. Разложив (7.3.50) для больших значений аргумента и для $x > \mu_1$, получим, используя (7.3.17) и (7.3.19),

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{V \pi [(x - \mu_1)(\mu_2 - x) f(x)]^{1/4}} \left[a_1 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + b_1 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (7.3.54)$$

Аналогично, разложив (7.3.52) для больших значений аргумента и для $x < \mu_2$, получим

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{V \pi [(x - \mu_1)(\mu_2 - x) f(x)]^{1/4}} \left[a_2 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + b_2 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (7.3.55)$$

Приравняв (7.3.54) и (7.3.55), придем к уравнению

$$a_1 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_1 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ = a_2 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_2 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (7.3.56)$$

Введя обозначение

$$\Delta = \frac{2}{3} \lambda (\varphi_1^{3/2} + \varphi_2^{3/2}) + \frac{\pi}{2} = \lambda \int_{\mu_1}^{\mu_2} V(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau) f(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2}, \quad (7.3.57)$$

получим

$$\frac{2}{3} \lambda \varphi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} = \Delta - \left(\frac{2}{3} \lambda \varphi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда из (7.3.56) следует

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 \sin \Delta - a_2 \cos \Delta, \\ b_1 &= a_2 \sin \Delta + b_2 \cos \Delta. \end{aligned} \quad (7.3.58)$$

Если теперь y — ограниченная функция x , как это имеет место для решений уравнения Шредингера, то в силу предельного соотношения $Bi(z) \rightarrow \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp[(2/3)z^{3/2}]$ при $z \rightarrow \infty$ будем иметь $b_1, b_2 = 0$. Следовательно, второе из уравнений (7.3.59) дает

$$\sin \Delta = 0, \quad \Delta = n\pi, \quad (7.3.59)$$

где n — целое число. Тогда в силу (7.3.57)

$$\lambda = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi}{\int_{\mu_1}^{\mu_2} [(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau) f(\tau)]^{1/2} d\tau}. \quad (7.3.60)$$

Чтобы не представлять решение в виде двух разложений, Миллер и Гуд [1953], Казаринов [1958] и Лангер [1959в] предложили выразить решение с помощью одного равномерно пригодного разложения в терминах функций параболического цилиндра. Обращаясь к преобразованию (7.3.44), выберем функцию ζ'^2 такой, чтобы она имела два простых нуля. Будем считать, что они расположены в точках $z = \pm 1$, причем точка $z = -1$ соответствует точке $x = \mu_1$, и положим (Пайк [1964])

$$\zeta'^2 = 4a^2(1 - z^2). \quad (7.3.61)$$

Выберем a таким образом, чтобы $z = 1$ соответствовало бы точке $x = \mu_2$. Тогда из (7.3.44) получаем

$$\zeta = 2a \int_{-1}^z \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \int_{\mu_1}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau. \quad (7.3.62)$$

Здесь ветви квадратного корня должны быть выбраны таким образом, чтобы z была бы регулярной функцией x и чтобы области $q_1(x) > 0$ и $q_1(x) < 0$ отображались бы соответственно в области $z^2 < 1$ и $z^2 > 1$. Выбрав точку $z = 1$, соответствующую точке $x = \mu_2$, мы получили следующее уравнение для a :

$$2a \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \int_{-\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau.$$

Следовательно,

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau. \quad (7.3.63)$$

С учетом (7.3.61) присоединенное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + 4a^2 \lambda^2 (1 - z^2) v = 0. \quad (7.3.64)$$

Решениями этого уравнения будут функции

$$v = W_v(2\sqrt{a\lambda} z), \quad v + \frac{1}{2} = a\lambda, \quad (7.3.65)$$

где W_v — функция Вебера порядка v . Если y ограничена на бесконечности, то и функция v должна быть ограниченной. Следовательно, $v = n$, где n — целое число. А тогда

$$\lambda = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{\int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau}, \quad (7.3.66)$$

что согласуется с (7.3.60).

Задачи с двумя точками возврата изучались также Олвером [1959] и Моригути [1959]. В числе других авторов задачами с несколькими точками возврата занимались Евграфов и Федорюк [1966], Хзи и Сибуйа [1966], Сибуйа [1967], Линн и Келлер [1970].

7.3.4. Задачи с точками возврата высших порядков

В этом пункте положим

$$q_1 = (x - \mu)^\alpha f(x), \quad f(x) > 0, \quad (7.3.67)$$

где α — положительное действительное число. Для нахождения одного равномерно пригодного разложения положим $\zeta'^2 = z^\alpha$, так, чтобы функция ζ'^2 имела бы такое же число нулей, что и $q_1(x)$. Следовательно,

$$\zeta = \frac{2}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/\alpha} = \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad (7.3.68)$$

где ветви квадратного корня выбраны таким образом, чтобы области $q_1(x) > 0$ и $q_1(x) < 0$ отображались в области $z^\alpha > 0$ и $z^\alpha < 0$ соответственно. Это преобразование приводит к присоединенному уравнению вида (Лангер [1931])

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z^\alpha v = 0. \quad (7.3.69)$$

Решение уравнения (7.3.69) имеет вид

$$v = z^{1/2} \left\{ c_1^* J_v \left[\frac{2\lambda}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/2} \right] + c_2^* J_{-v} \left[\frac{2\lambda}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/2} \right] \right\}, \quad (7.3.70)$$

где $v = (2 + \alpha)^{-1}$. Следовательно, в первом приближении

$$y = \frac{\left[\int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^{\alpha} f(\tau)]^{1/2} d\tau \right]^{1/2}}{[(x - \mu)^{\alpha} f(x)]^{1/4}} \left\{ c_1 J_v \left[\lambda \int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^{\alpha} f(\tau)]^{1/2} d\tau \right] + \right. \\ \left. + c_2 J_{-v} \left[\lambda \int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^{\alpha} f(\tau)]^{1/2} d\tau \right] \right\}. \quad (7.3.71)$$

Маккелви [1955] выразил асимптотические решения задачи с точкой возврата второго порядка (т. е. при $\alpha = 2$) через функции Уиттекера. Задача с точкой возврата второго порядка возникает при рассмотрении дифракции на эллиптических цилиндрах с почти единичным эксцентриситетом (Гудрич и Казаринов [1963]) и при решении уравнения Шредингера (Фосс [1933]). Первое исследование задачи с точкой возврата второго порядка провел Голдстейн [1931] с помощью метода сращивания асимптотических разложений, как это сделано в п. 7.3.1.

7.3.5. Высшие приближения

До сих пор в наших рассмотрениях мы получали только первый член асимптотического разложения. Существуют четыре разных подхода к определению членов высшего порядка.

Подход Лангера. Суть этого подхода состоит в том, что всякий раз решение того уравнения, которое надо решить, связывается с решением некоторой более простой задачи со сходной структурой, которая может быть явно решена в трансцендентных функциях (Лангер [1949]). Недостатком этого подхода является то, что он не пригоден для численных расчетов, так как коэффициенты асимптотических разложений являются функциями как независимой переменной, так и параметра возмущения. Кроме того, разложения определяются путем нескольких преобразований. Ниже мы увидим, что, используя подход Олвера, можно получить эквивалентные разложения более простым путем.

Подход Черри. В 1949 и 1950 гг. Черри развил методику получения членов высшего порядка в задаче с простой точкой возврата. С помощью преобразования Лангера (п. 7.3.2) эта задача приводилась к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + [-\lambda^2 z + \lambda g(z, \lambda)] v = 0, \quad (7.3.72)$$

где

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(z). \quad (7.3.73)$$

В рассмотренных Черри отсутствуют все g_n с четными индексами n . Будем искать формальное разложение вида

$$v = A(z; \lambda) \zeta_i [\lambda^{2/3} \varphi(z; \lambda)], \quad i = 1, 2,$$

где ζ_1 и ζ_2 — функции Эйри первого и второго родов соответственно. Поскольку справедливы равенства

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = A'' \zeta_i + (2A' \varphi' + A \varphi'') \frac{d \zeta_i}{d \varphi} + A \varphi'^2 \frac{d^2 \zeta_i}{d \varphi^2} \quad (7.3.74)$$

и

$$\frac{d^2 \zeta_i}{d \varphi^2} = \lambda^2 \varphi \zeta_i,$$

то уравнение (7.3.22) принимает вид

$$(A'' + \lambda^2 \varphi \varphi'^2 A - \lambda^2 z A + \lambda g A) \zeta_i + (2A' \varphi' + A \varphi'') \frac{d \zeta_i}{d \varphi} = 0. \quad (7.3.75)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при ζ_i и $d \zeta_i / d \varphi$, получим

$$2A' \varphi' + A \varphi'' = 0, \quad (7.3.76)$$

$$\lambda^2 (\varphi \varphi'^2 - z) + \lambda g + \frac{A''}{A} = 0. \quad (7.3.77)$$

В силу (7.3.76)

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}}. \quad (7.3.78)$$

Уравнение (7.3.77), следовательно, запишется в виде

$$\lambda^2 (\varphi \varphi'^2 - z) + \lambda g + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 - \frac{\varphi'''}{2 \varphi'} = 0. \quad (7.3.79)$$

Чтобы решить это уравнение, положим в нем

$$\varphi = z + \lambda^{-1} \varphi_1(z) + \lambda^{-2} \varphi_2(z) + \dots \quad (7.3.80)$$

и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим уравнения для последовательного определения φ_n . Первые два из этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} 2z \varphi_1' + \varphi_1 + g_0 &= 0, \\ 2z \varphi_2' + \varphi_2 &= -g_1 - z \varphi_1'^2 - 2\varphi_1 \varphi_1'. \end{aligned} \quad (7.3.81)$$

Их решениями являются функции

$$\begin{aligned} \sqrt{z} \varphi_1 &= - \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2 \sqrt{\tau}} d\tau, \\ \sqrt{z} \varphi_2 &= - \int_0^z \frac{g_1(\tau) + \tau \varphi_1'^2(\tau) + 2\varphi_1(\tau) \varphi_1'(\tau)}{2 \sqrt{\tau}} d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.82)$$

Нижний предел в этих интегралах выбран таким, чтобы функции φ_1 и φ_2 были бы регулярными в точке $z=0$.

Таким образом, решение v задается формальным разложением

$$v = \frac{\zeta_i(\lambda^{2/3}\varphi)}{\sqrt{\varphi'}}, \quad (7.3.83)$$

$$\varphi(z; \lambda) = z + \lambda^{-1}\varphi_1(z) + \lambda^{-2}\varphi_2(z) + \dots$$

Это формальное разложение является равномерным приближением к решению исходной задачи всюду, за исключением малых окрестностей нулей функции v , в которых Черри использовал следующую модифицированную формулу:

$$v = Ai(\lambda^{2/3}z)(1 + \lambda^{-2}a_1 + \lambda^{-4}a_2 + \dots) + \frac{dAi}{dz}(\lambda^{2/3}z)(\lambda^{-2}b_1 + \lambda^{-4}b_2 + \dots). \quad (7.3.84)$$

Если справедливо разложение

$$\lambda g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} g_{2n}(z),$$

то a_n и b_n могут быть определены из (7.3.83). Для этого следует разложить φ' и $Ai(\lambda^{2/3}\varphi)$ в точке $\varphi=z$ и использовать соотношение $d^2Ai/dz^2 = \lambda^2 z Ai$.

Подход Олвера. Олвер [1954] предложил отыскивать полное асимптотическое разложение, предположив, что

$$v = A(z; \lambda)\zeta_i(\lambda^{2/3}z) + B(z; \lambda)\zeta'_i(\lambda^{2/3}z). \quad (7.3.85)$$

Этот вид совпадает с окончательным видом разложения, полученного Лангером [1949], и с модифицированной формулой Черри (7.3.84). Это разложение может быть рассмотрено так же, как результат применения метода составных разложений, описанного в § 4.2.

Из равенства

$$\begin{aligned} \zeta''_i &= \lambda^2 z \zeta_i, & v' &= A'\zeta_i + (A+B')\zeta'_i + B\zeta''_i = \\ &= (A' + \lambda^2 z B)\zeta_i + (A+B')\zeta'_i \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} v'' &= (A'' + \lambda^2 B + \lambda^2 z B')\zeta_i + (2A' + \lambda^2 z B + B'')\zeta'_i + (A+B')\zeta''_i = \\ &= [A'' + \lambda^2 B + \lambda^2 z (A + 2B')] \zeta_i + (2A' + \lambda^2 z B + B'')\zeta'_i. \end{aligned}$$

Следовательно, (7.3.72) принимает вид

$$A'' + \lambda^2 B + 2\lambda^2 z B' + \lambda g A \zeta_i + (2A' + B'' + \lambda g B)\zeta'_i = 0. \quad (7.3.86)$$

Приравняв нулю коэффициенты при ζ_i и ζ'_i , получим

$$\begin{aligned} 2A' + B'' + \lambda g B &= 0, \\ A'' + \lambda^2 B + 2\lambda^2 z B' + \lambda g A &= 0. \end{aligned} \quad (7.3.87)$$

Этим уравнениям удовлетворяют формальные разложения вида

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(z), \\ B &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(z), \end{aligned} \quad (7.3.88)$$

где

$$\begin{aligned} 2A'_0 + g_0 B_1 &= 0, \\ 2zB'_1 + B_1 + g_0 A_0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.3.89)$$

$$2A'_n + g_0 B_{n+1} = - \sum_{m=1}^n g_m B_{n-m+1} = \alpha_n, \quad n \geq 1, \quad (7.3.90)$$

$$2zB'_{n+1} + B_{n+1} + g_0 A_n = -A'_{n-1} - \sum_{m=1}^n g_m A_{n-m} = \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Решение системы (7.3.89) имеет вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \operatorname{ch} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau, \\ B_1 &= - \frac{\operatorname{sh} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \quad (7.3.91)$$

Следовательно, решение системы (7.3.90) задается равенствами

$$A_n = a_n(z) \operatorname{ch} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau + b_n(z) \operatorname{sh} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau, \quad (7.3.92)$$

$$\sqrt{z} B_{n+1} = -a_n(z) \operatorname{sh} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau - b_n(z) \operatorname{ch} \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^z [\alpha_n(\tau) A_0(\tau) - \beta_n(\tau) B_1(\tau)] d\tau, \\ b_n &= \frac{1}{2} \int_0^z \left[\sqrt{\tau} \alpha_n(\tau) B_1(\tau) - \frac{\beta_n(\tau) A_0(\tau)}{\sqrt{\tau}} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.93)$$

В том случае, когда

$$\lambda g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} g_n(z),$$

системе (7.3.87) удовлетворяют формальные разложения вида

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-2n} A_n(z), \quad A_0 = 1, \\ B &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-2n} B_n(z). \end{aligned} \quad (7.3.94)$$

Подставив эти разложения в (7.3.87) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\begin{aligned} 2A'_n &= -B''_n - g_0 B_n - \sum_{m=1}^{n-1} g_m B_{n-m} = \alpha_n, \\ 2zB'_n + B_n &= -A''_{n-1} - g_0 A_{n-1} - \sum_{m=1}^{n-1} g_m A_{n-m-1} = \beta_n. \end{aligned} \quad (7.3.95)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{z} B_n &= \int_0^z \frac{\beta_n(\tau)}{2 \sqrt{\tau}} d\tau, \\ A_n &= \frac{1}{2} \int_0^z \alpha_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.96)$$

Последовательные преобразования Лангера. Для нахождения высших приближений к решению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (7.3.97)$$

в котором $q(x)$ обращается в нуль на рассматриваемом интервале, Имаи [1948], [1950] предложил повторно применять преобразование Лангера. Моригути [1959] применил и значительно расширил эту методику. В случае простой точки возврата при $x = \mu$ мы вводим сначала преобразование Лангера

$$\frac{2}{3} z^{3/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau, \quad y = \chi^{-1/4} v, \quad \chi = \frac{q}{z}, \quad (7.3.98)$$

с помощью которого уравнение (7.3.97) приводится к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + [\lambda^2 z - \delta(z)] v = 0, \quad (7.3.99)$$

где

$$\delta = \chi^{-1/4} \frac{d^2(\chi^{-1/4})}{dz^2} = -\chi^{-3/4} \frac{d^2(\chi^{-1/4})}{dx^2}.$$

Поскольку $\delta = O(1)$ и λ — большое число, то v приближенно задается решениями уравнения

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 zv = 0, \quad (7.3.100)$$

которые имеют вид

$$v = \xi_i (\lambda^{2/3} z), \quad (7.3.101)$$

где ξ_1 и ξ_2 — функции Эйри первого и второго родов.

Чтобы уточнить разложение (7.3.101), перепишем уравнение (7.3.99) в исходной форме (7.3.97) и заменим независимую переменную z на x_1 по формуле

$$x_1 = z - \mu_1, \quad (7.3.102)$$

где μ_1 — корень уравнения $\lambda^2 z - \delta(z) = 0$, т. е.

$$\lambda^2 \mu_1 - \delta(\mu_1) = 0. \quad (7.3.103)$$

Тогда уравнение (7.3.99) может быть записано в виде

$$\frac{d^2v}{dx_1^2} + \lambda^2 [a_1 x_1 + R_1(x_1)] v = 0, \quad (7.3.104)$$

где

$$a_1 = 1 - \lambda^{-2} \delta'(\mu_1), \quad R_1 = -\lambda^{-2} \left[\frac{1}{2} \delta''(\mu_1) x_1^2 + \frac{1}{3!} \delta'''(\mu_1) x_1^3 + \dots \right]. \quad (7.3.105)$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением (7.3.97), и, следовательно, его приближенное решение может быть получено с помощью преобразования

$$\frac{2}{3} z_1^{3/2} = \int_0^{x_1} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad v = \chi_1^{-1/4} v_1, \quad (7.3.106)$$

$$\chi_1 = \frac{q_1}{z_1}, \quad q_1 = a_1 x_1 + R_1(x_1).$$

Это преобразование приводит уравнение (7.3.104) к виду

$$\frac{d^2v_1}{dz_1^2} + [\lambda^2 z_1 - \delta_1(z_1)] v_1 = 0, \quad (7.3.107)$$

где

$$\delta_1 = -\chi_1^{-3/4} \frac{d^2(\chi_1^{-1/4})}{dx_1^2}. \quad (7.3.108)$$

Первым приближением к v_1 является решение уравнения

$$\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} + \lambda^2 z_1 v_1 = 0. \quad (7.3.109)$$

Следовательно,

$$v_1 = \zeta_i (\lambda^{2/3} z_1). \quad (7.3.110)$$

Совершив теперь обратный переход к переменным x и y , получим уточненное приближение к решению исходного уравнения. Из (7.3.106) имеем

$$\frac{2}{3} z_1^{3/2} = \int_0^{x_1} \sqrt{a_1 \tau} \sqrt{1 + \frac{R_1}{a_1 \tau}} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{a_1} x_1^{3/2} + O(\lambda^{-2}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{a_1} x_1 + O(\lambda^{-2}), \\ \chi_1 &= a_1^{2/3} + O(\lambda^{-2}). \end{aligned} \quad (7.3.111)$$

Из равенств

$$y = \frac{v}{\sqrt[4]{\chi}} = \frac{v_1}{\sqrt[4]{\chi \chi_1}} \approx \frac{z^{1/4} v_1}{q^{1/4} a_1^{1/6}}$$

следует, что два независимых решения уравнения (7.3.97) приближенно задаются соотношением

$$y = \sqrt{\frac{z(x)}{q(x)}} \zeta_i [\lambda^{2/3} a_1^{1/3} (z(x) - \mu_1)], \quad (7.3.112)$$

где $z(x)$ определено в (7.3.98).

Высшие приближения могут быть получены повторным применением описанной выше процедуры.

7.3.6. Неоднородная задача с простой точкой возврата — первое приближение

В этом пункте мы найдем первое приближение к частному решению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = \lambda^2 G(x) \quad (7.3.113)$$

для больших λ и при условии, что $q_1(x)$ имеет простой корень в точке $x = \mu$. Разделив (7.3.113) на λ^2 и положив $\lambda \rightarrow \infty$, получим в качестве приближенного частного решения функцию

$$y = \frac{G(x)}{q_1(x)}. \quad (7.3.114)$$

Это решение имеет особенность в точке $x = \mu$, если только функция $G(x)$ не имеет в точке $x = \mu$ простого корня или корня большей кратности.

Для нахождения первого приближения к частному решению в случае, когда $G(\mu) \neq 0$, применим сначала преобразование

$$z = \varphi(x), \quad \frac{2}{3} z^{3/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\varphi'}} \quad (7.3.115)$$

к уравнению (7.3.114) и приведем его к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + (\lambda^2 z - \delta) v = \lambda^2 g(z), \quad (7.3.116)$$

где δ определено равенством (7.3.37) и

$$g(z) = \{\varphi' [x(z)]\}^{-3/2} G[x(z)]. \quad (7.3.117)$$

Поскольку $\delta = O(1)$ и λ — большое число, то первое приближение к уравнению (7.3.116) можно записать в виде

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z v = \lambda^2 g(z). \quad (7.3.118)$$

Для нахождения частного решения запишем $g(z)$ в виде суммы двух слагаемых

$$g(z) = g(0) + [g(z) - g(0)] \quad (7.3.119)$$

и определим частные решения, соответствующие каждому из них. Если функция $g(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$, то частное решение, соответствующее второму слагаемому, приближенно задается равенством

$$v_1 = \frac{g(z) - g(0)}{z} \quad (7.3.120)$$

равномерно для всех z . Для нахождения частного решения, соответствующего первому слагаемому, положим $\xi = \lambda^{2/3} z$ и приведем уравнение (7.3.118) к виду

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \xi v = \lambda^{2/3} g(0). \quad (7.3.121)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$v_2 = \lambda^{2/3} g(0) T(\xi), \quad (7.3.122)$$

где функция $T(\xi)$ определяется из условий

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} + \xi T = 1, \quad T(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7.3.123)$$

Таким образом, $T(\xi)$ может быть выражено через функции Ломмеля (см., например, Ватсон [1944], стр. 345—351) согласно равенствам

$$T(\xi) = \frac{2}{3} \xi^{1/2} S_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) = \int_0^\infty e^{-\xi t} e^{-t^{3/2}} dt, \quad |\xi| < \infty,$$

$$T(\xi) = 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n/3} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \frac{(-\xi)^n}{n!}, \quad |\xi| < \infty,$$

$$T(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n)!}{3^n n!} \xi^{-3n-1}, \quad |\arg \xi| < \frac{2\pi}{3}, \quad (7.3.124)$$

где через $S_{0,1/3}$ обозначена функция Ломмеля.

Поэтому частное решение уравнения (7.3.118) приближенно задается равенством

$$v = \lambda^{2/3} g(0) T(\lambda^{2/3} z) + \frac{g(z) - g(0)}{z}. \quad (7.3.125)$$

Совершив обратное преобразование к переменным x и y , получим

$$y = \lambda^{2/3} \frac{G(\mu)}{[\varphi'(x) f(\mu)]^{1/2}} T(\lambda^{2/3} z) + \frac{1}{q_1(x)} \left[G(x) - \frac{G(\mu) \varphi'^{3/2}}{\sqrt{f(\mu)}} \right], \quad (7.3.126)$$

где

$$f(x) = \frac{q_1(x)}{(x-\mu)}.$$

Неоднородные задачи с точками возврата возникают при исследовании устойчивости пограничного слоя (Холстейн [1950]), при рассмотрении тонких упругих тороидальных оболочек и изгиба кривых труб (см., например, Кларк [1964]). Вышеизложенная методика развита Гольштайном [1950], Кларком [1958], [1963] и Тумаркиным [1959]. Стил [1965] получил одно частное решение уравнения второго порядка, выраженное через общие функции Ломмеля $S_{\mu,\nu}$.

7.3.7. Неоднородная задача с простой точкой возврата — высшие приближения

Чтобы найти полное асимптотическое представление решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 f(x) + \lambda \chi(x, \lambda)] y = \lambda^2 G(x, \lambda), \quad (7.3.127)$$

в котором функция $f(x)$ имеет простой нуль в точке $x = \mu$ и

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \chi_n(x), \quad G(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} G_n(x) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

применим сначала к этому уравнению преобразование

$$z = \varphi(x), \quad \frac{2}{3} z^{3/2} = \int_{\mu}^x V \overline{f(\tau)} d\tau, \quad y = v / \sqrt{\varphi'}. \quad (7.3.128)$$

Тогда это уравнение приведет к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + [\lambda^2 z + \lambda q(z, \lambda)] v = \lambda^2 g(z, \lambda), \quad (7.3.129)$$

где

$$\begin{aligned} q(z(x), \lambda) &= P^4(x) \chi(x, \lambda) + \lambda^{-1} P^3(x) P''(x), \\ g(z(x), \lambda) &= P^3(x) G(x, \lambda), \quad P(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(x)}}. \end{aligned} \quad (7.3.130)$$

Предположив, что справедливы разложения

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(z), \quad q(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(z) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (7.3.131)$$

сосредоточим наше внимание на уравнении (7.3.129).

Будем предполагать, что полное асимптотическое разложение частного решения задачи (7.3.129) и (7.3.131) имеет вид

$$v = C(z, \lambda) + \lambda^{2/3} A(z, \lambda) T(\xi) + \lambda^{1/3} B(z, \lambda) T'(\xi), \quad \xi = \lambda^{2/3} z, \quad (7.3.132)$$

где $T(\xi)$ определена в (7.3.124) как решение уравнения

$$T'' + \xi T = 1, \quad T = \frac{1}{\xi} \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7.3.133)$$

В силу равенств

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= C' + \lambda^{2/3} A' T + \lambda^{1/3} (\lambda A + B') T' + \lambda B T'' = \\ &= C' + \lambda B + \lambda^{2/3} (A' - \lambda z B) T + \lambda^{1/3} (\lambda A + B') T', \\ \frac{d^2 v}{dz^2} &= C'' + 2\lambda B' + \lambda^2 A + \lambda^{2/3} (A'' - \lambda^2 A z - \lambda B - 2\lambda z B') T + \\ &+ \lambda^{1/3} (2\lambda A' - \lambda^2 z B + B'') T' \end{aligned}$$

уравнение (7.3.129) принимает вид

$$\begin{aligned} [(\lambda^2 z + \lambda q) C + C'' + 2\lambda B' + \lambda^2 A - \lambda^2 g] + \\ + \lambda^{2/3} [A'' - \lambda B - 2\lambda z B' + \lambda q A] T + \lambda^{1/3} [2\lambda A' + \\ + B'' + \lambda q B] T' = 0. \end{aligned} \quad (7.3.134)$$

Для того чтобы соотношение (7.3.134) было тождеством, необходимо, чтобы коэффициенты в квадратных скобках обратились в нуль, т. е. чтобы были выполнены равенства

$$(\lambda^2 z + \lambda q) C + \lambda^2 A - \lambda^2 g + 2\lambda B' + C'' = 0, \quad (7.3.135)$$

$$2\lambda z B' + \lambda B - A'' - \lambda q A = 0, \quad (7.3.136)$$

$$2\lambda A' + \lambda q B + B'' = 0. \quad (7.3.137)$$

Для решения уравнений (7.3.135)–(7.3.137) предположим, что имеют место формальные разложения вида

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(z), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(z), \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} C_n, \quad (7.3.138)$$

и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$z C_n = g_n - A_n - 2B'_{n-1} - C''_{n-2} - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1} C_k, \quad (7.3.139)$$

$$2z B'_n + B_n - q_0 A_n = A''_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} A_k, \quad (7.3.140)$$

$$2A'_n + q_0 B_n = -B''_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} B_k. \quad (7.3.141)$$

Здесь все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю по определению. Положив

$$M_z A_n = A''_n(z) + \sum_{k=0}^n q_{n-k+1}(z) A_k(z), \quad (7.3.142)$$

$$u_n(z) = A_n(z) + i\sqrt{z} B_n(z),$$

объединим уравнения (7.3.140) и (7.3.141) в одно уравнение

$$2\sqrt{z} u'_n - i q_0 u_n = i M_z A_{n-1} - \sqrt{z} M_z B_{n-1} \quad (7.3.143)$$

с общим решением

$$u_n = (\alpha_n + i\beta_n) e^{i\theta(z)} + \frac{i}{2} \int_0^z e^{i\theta(z) - i\theta(\tau)} [\tau^{-1/2} M_\tau A_{n-1} + i M_\tau B_{n-1}] d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.144)$$

Здесь α_n и β_n — произвольные постоянные и

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (7.3.145)$$

Поскольку коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю, то при $n=0$ формула (7.3.144) принимает вид

$$u_0 = (\alpha_0 + i\beta_0) e^{i\theta}. \quad (7.3.146)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_0 \cos \theta - \beta_0 \sin \theta, \\ \sqrt{z} B_0 &= \alpha_0 \sin \theta + \beta_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.3.147)$$

Поскольку $\theta(0)=0$, то для ограниченности B_0 при $z \rightarrow 0$ необходимо, чтобы $\beta_0 \equiv 0$. Далее, уравнение (7.3.139) при $n=0$ записывается в виде

$$zC_0 = g_0 - A_0. \quad (7.3.148)$$

Для того чтобы C_0 было ограниченным при $z \rightarrow 0$, необходимо, чтобы выполнялось

$$A_0(0) = g_0(0) = \alpha_0. \quad (7.3.149)$$

Тогда для v в первом приближении имеем

$$v = \frac{g_0(z) - g_0(0) \cos \theta}{z} + \lambda^{2/3} g_0(0) \cos \theta T(\xi) + \lambda^{1/3} g_0(0) z^{-1/2} \sin \theta T'(\xi). \quad (7.3.150)$$

При $q_0=0$ (т. е. $\theta=0$) эта формула сводится к (7.3.125).

Вообще, чтобы B_n были регулярными в точке $z=0$, будем требовать выполнения равенств $\beta_n=0$, а для регулярности C_n в точке $z=0$ будем требовать, чтобы

$$\begin{aligned} \alpha_n &= A_n(0) = g_n(0) - 2B'_{n-1}(0) - C''_{n-2}(0) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(0) C_k(0), \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.3.151)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \alpha_n \cos \theta(z) - \frac{1}{2} \int_0^z \tau^{-1/2} \sin [\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau A_{n-1} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^z \cos [\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau B_{n-1} d\tau, \end{aligned} \quad (7.3.152)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z} B_n(z) &= \alpha_n \sin \theta(z) + \frac{1}{2} \int_0^z \tau^{-1/2} \cos [\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau A_{n-1} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^z \sin [\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau B_{n-1} d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.153)$$

Это общее решение было получено Тумаркиным [1959] и обосновано Кларком [1963].

7.3.8. Неоднородная задача с точкой возврата второго порядка

В исследованиях по тороидальным мембранам с внутренним давлением Сандерс и Липинс [1963] столкнулись с неоднородной задачей, содержащей точку возврата второго порядка и описываемой уравнением вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 q(x) y = \lambda^2 G(x), \quad (7.3.154)$$

где $q(x)$ имеет двукратный нуль в точке $x = \mu$. Чтобы найти первое приближение к частному решению этого уравнения, положим

$$z = \varphi(x), \quad \frac{1}{2} z^2 = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\varphi'}} \quad (7.3.155)$$

и приведем уравнение (7.3.154) к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + (\lambda^2 z^2 - \delta) v = \lambda^2 g(z), \quad (7.3.156)$$

в котором δ и g определены соотношениями (7.3.37) и (7.3.117). Поскольку $\delta = O(1)$, а λ — большое число, то частное решение уравнения (7.3.156) задается приближенно уравнением

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z^2 v = \lambda^2 g(z). \quad (7.3.157)$$

Для нахождения приближенного частного решения уравнения (7.3.157) выразим $g(z)$ в виде суммы трех слагаемых согласно равенству

$$g(z) = g(0) + g'(0)z + [g(z) - g(0) - g'(0)z] \quad (7.3.158)$$

и определим частные решения, соответствующие этим трем членам. Если существует $g''(0)$, то частное решение, соответствующее последнему члену, приближенно задается равенством

$$v_1 = \frac{g(z) - g(0) - g'(0)z}{z^2} \quad (7.3.159)$$

равномерно для всех z . Для нахождения частных решений, соответствующих двум другим слагаемым в $g(z)$, положим $\xi = \lambda^{1/2} z$

и преобразуем уравнение (7.3.157) к виду

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \xi^2 v = \lambda g(0) + \lambda^{1/2} g'(0) \xi. \quad (7.3.160)$$

Сандерс и Липинс [1963] определили две функции $T_1(\xi)$ и $T_2(\xi)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{d\xi^2} + \xi^2 T_1 &= 1, & T_1 &= \frac{1}{\xi^2} & \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \\ \frac{d^2 T_2}{d\xi^2} + \xi^2 T_2 &= \xi, & T_2 &= \frac{1}{\xi} & \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.3.161)$$

С помощью этих функций частное решение уравнения (7.3.160) может быть записано в виде

$$v = \lambda g(0) T_1(\xi) + \lambda^{1/2} g'(0) T_2(\xi). \quad (7.3.162)$$

Поэтому частное решение уравнения (7.3.157) приближенно задается равенством

$$v = \frac{g(z) - g(0) - g'(0)z}{z^2} + \lambda g(0) T_1(\xi) + \lambda^{1/2} g'(0) T_2(\xi). \quad (7.3.163)$$

Совершив обратный переход к переменным x и y , можем получить равномерно пригодное первое приближение к решению исходного уравнения.

7.3.9. Задачи с особенностями в точках возврата

Рассмотрим асимптотические разложения решений уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q(x) + r(x)] y = 0 \quad (7.3.164)$$

для больших λ и при условиях

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0(x - \mu)^\alpha [1 + O(x - \mu)], \\ r(x) &= r_0(x - \mu)^{-2} [1 + O(x - \mu)], \end{aligned} \quad \text{при } x \rightarrow \mu. \quad (7.3.165)$$

Задачи, рассмотренные в предыдущих разделах (в которых $r_0 = 0$ и $\alpha \geq 0$), являются частными случаями настоящей задачи, в которой $r_0 \neq 0$ и α может иметь отрицательные значения. При $x \rightarrow \mu$ уравнение (7.3.164) стремится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\lambda^2 q_0(x - \mu)^\alpha + \frac{r_0}{(x - \mu)^2} \right] y = 0. \quad (7.3.166)$$

Поэтому в качестве присоединенного мы выберем уравнение

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\lambda^2 z^\alpha + \frac{r_0}{z^2} \right) v = 0, \quad (7.3.167)$$

решения которого выражаются в виде

$$v = z^{1/2} \mathcal{E}_v(\gamma z^\beta),$$

$$\beta\gamma = \lambda, \quad \beta = \frac{\alpha+2}{2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-4r_0}}{2+\alpha}. \quad (7.3.168)$$

Здесь цилиндрические функции $\mathcal{E}_v(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_v}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d \mathcal{E}_v}{dt} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \mathcal{E}_v = 0. \quad (7.3.169)$$

Функции Бесселя, Неймана и Ганкеля ($J_v(t)$, $Y_v(t)$, $H_v^1(t)$ и $H_v^2(t)$) являются частными видами цилиндрических функций.

Исследование задач с особенностями в точках возврата было начато Лангером [1935]. Значительный вклад в изучение этих задач внесли также Кэшуэлл [1951], Олвер [1954], Свенсон [1956], Казаринов и Маккелви [1956], Эрдейи [1960] и Вазов [1965].

Чтобы определить асимптотические разложения решений уравнения (7.3.164), введем в рассмотрение преобразование

$$z = \varphi(x), \quad v = \psi(x) y(x), \quad \psi(x) = \sqrt{\varphi'}, \quad (7.3.170)$$

которое приводит уравнение (7.3.164) к виду

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left\{ \frac{\lambda^2 q(x)}{\varphi'^2} + \frac{1}{\varphi'^2} \left[r(x) + \frac{2\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{\psi} \right] \right\} v = 0. \quad (7.3.171)$$

Для того чтобы это уравнение приближенно совпадало бы с уравнением (7.3.167), потребуем выполнения равенства

$$\varphi^\alpha \varphi'^2 = q(x), \quad (7.3.172)$$

откуда следует, что

$$\frac{2}{\alpha+2} \varphi^{(\alpha+2)/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau. \quad (7.3.173)$$

Следовательно, уравнение (7.3.171) принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\lambda^2 z^\alpha + \frac{r_0}{z^2} \right) v = F(z) v, \quad (7.3.174)$$

где

$$F = \frac{r_0}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi'^2} \left[r(x(z)) + \frac{2\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{\psi} \right]. \quad (7.3.175)$$

При $x \rightarrow \mu$

$$\frac{2}{\alpha+2} \varphi^{(\alpha+2)/2} \rightarrow \frac{2}{\alpha+2} \sqrt{q_0} (x - \mu)^{(\alpha+2)/2},$$

откуда следует

$$\varphi \rightarrow q_0^{1/(\alpha+2)}(x-\mu), \quad \varphi' \rightarrow q_0^{1/(\alpha+2)}, \quad \psi \rightarrow q_0^{1/2(\alpha+2)}, \quad (7.3.176)$$

$$F = O\left(\frac{1}{x-\mu}\right). \quad (7.3.177)$$

Следовательно, первое приближение к v задается решением (7.3.168) уравнения (7.3.167). Тогда y приближенно задается равенством

$$g = \frac{\left[\int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau \right]^{1/2}}{\sqrt[4]{q(x)}} \mathcal{E}_v \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau \right]. \quad (7.3.178)$$

Используя подход Олвера (п.7.3.5) и предположив, что

$$v = A(z, \lambda) \xi_i(z; \lambda) + B(z, \lambda) \xi'_i(z; \lambda), \quad (7.3.179)$$

где ξ_1 и ξ_2 — независимые решения уравнения (7.3.167), можно получить высшие приближения к решению уравнения (7.3.174).

7.3.10. Задачи высшего порядка с точками возврата

Интерес к задачам с точкой возврата для дифференциальных уравнений порядка выше двух обусловлен большей частью задачей о гидродинамической устойчивости параллельных течений. Линейная задача об устойчивости параллельного течения может быть сведена к решению так называемого уравнения Орра — Зоммерфельда (см., например, Линь [1955])

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi = i\alpha R \{ [U(y) - c] (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''(y) \varphi \} \quad (7.3.180)$$

относительно амплитуды возмущения $\varphi(y)$. В этом уравнении профиль скоростей невозмущенного потока $U(y)$ — известная функция. Параметры α и R являются положительными постоянными, представляющими собой волновое число возмущения и число Рейнольдса для потока соответственно. Параметр c — комплексная постоянная, действительная часть которой c_r определяет волновую скорость, а мнимая часть c_i — скорость затухания или возрастания возмущения. Это уравнение, дополненное четырьмя однородными граничными условиями, при известных α и R образует задачу на собственные значения с собственной функцией φ и собственными значениями c_r и c_i . Система является неустойчивой при $c_i > 0$, устойчивой при $c_i < 0$ и при $c_i = 0$ находится в состоянии безразличного равновесия.

Для больших αR можно получить два независимых решения этой задачи в виде

$$\varphi = \varphi_0(y) + (\alpha R)^{-1} \varphi_1(y) + \dots \quad (7.3.181)$$

Два других решения могут быть получены в виде

$$\varphi = e^{\pm \sqrt{\alpha R} \zeta} [(U - c)^{-5/4} + (\alpha R)^{-1/2} f_1(y) + \dots], \quad (7.3.182)$$

где $\zeta = \int_{y_0}^y \sqrt{i(U - c)} dy$. Вышеприведенное решение нарушается в окрестности нулей функции $U - c$, которые являются точками возврата для уравнения (7.3.180).

Толлмин [1947] и Вазов [1953] получили равномерно пригодные асимптотические решения первого порядка для уравнения (7.3.180). Полные равномерно пригодные разложения были получены Лангером [1957], [1959a], Рабенстейном [1959], Линем и Рабенстейном [1960], [1969]. К. Там получил для уравнения (7.3.180) равномерно пригодные разложения с помощью метода многих масштабов. Задачи с точкой возврата для уравнений n -го порядка изучал Сибуйа [1963a], [1963b].

7.4. Волновые уравнения

В этом параграфе мы опишем некоторые из известных методов, с помощью которых можно определять приближенные решения задач с линейным волновым уравнением и связанных с ними эллиптических задач. При описании этих методов мы будем использовать волновое уравнение вида

$$c^2(\mathbf{r}) \nabla^2 v - v_{tt} - \omega_0^2(\mathbf{r}) v = c^2(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (7.4.1)$$

Положив

$$v = u(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad (7.4.2)$$

придем к уравнению

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = g(\mathbf{r}). \quad (7.4.3)$$

Здесь k и n представляют собой волновое число и коэффициент преломления и задаются равенствами

$$k = \frac{\omega}{c_0}, \quad n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{r})}{\omega^2} \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})}, \quad (7.4.4)$$

где c_0 — некоторая характерная скорость. В этой задаче будем предполагать, что g — детерминированная функция, в то время как n может быть случайной функцией. Таким образом, результаты могут быть применены к распространению волн в случайной среде.

При постоянном n однородная задача допускает решение в виде плоской волны

$$u = A e^{i n \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (7.4.5)$$

где A — постоянная. Решение неоднородной задачи задается интегралом

$$u = - \int_V g(\xi) \frac{e^{ink|r-\xi|}}{4\pi|r-\xi|} d\xi, \quad (7.4.6)$$

где переменный вектор ξ пробегает объем рассеяния V . Если, однако, n не является постоянной величиной, будем искать асимптотические разложения решений уравнения (7.4.3). Выбор того или иного асимптотического метода для получения приближенного решения зависит от значения k и характера пространственного изменения n . Если n мало отличается от постоянной, то можно применять так называемое разложение Борна, разработанное физиками, или разложение Неймана, разработанное математиками, а также методы перенормировок или метод Рытова. Если же значения k велики, а n — медленно меняющаяся функция состояния, то можно использовать метод геометрической оптики. Хотя эти методы были разработаны для детерминированных задач, они могут быть использованы также в стохастических задачах. Для последних мы опишем также так называемый метод сглаживания, который является аналогом метода усреднения, рассмотренного в гл. 5. Область применения этих методов и дальнейшие ссылки читатель может найти в книгах Чернова [1960], Татарского [1959], Бабица [1970], [1971] и в обзорной статье Фриша [1968].

7.4.1. Разложение Борна — Неймана и диаграммы Фейнмана

Эта методика применима в случае, когда n мало отличается от постоянной. Будем считать, что при этом k и n нормированы таким образом, что постоянная составляющая n равна единице. Тем самым мы получаем возможность записать n^2 в виде

$$n^2 = 1 + \varepsilon \chi(r), \quad (7.4.7)$$

где ε мало, а $\chi = O(1)$. Для статистической задачи мы будем предполагать, что случайная функция χ от переменной r центрирована таким образом, что ее среднее значение, обозначаемое через $\langle \chi \rangle$, равно нулю. Для получения разложения Борна [1926] положим

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m. \quad (7.4.8)$$

Подставив это разложение в (7.4.3) и приравняв с учетом (7.4.7) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$L(u_0) = g, \quad (7.4.9)$$

$$L(u_m) = -k^2 \chi u_{m-1} \quad \text{для } m \geq 1. \quad (7.4.10)$$

Здесь оператор L определен равенством

$$L = \nabla^2 + k^2. \quad (7.4.11)$$

Уравнения (7.4.9) и (7.4.10) могут быть последовательно решены. Для некоторого заданного m правая часть (7.4.10) считается известной из решения предыдущего уравнения. Следовательно, решение задается равенством

$$u_m(\mathbf{r}) = -k^2 \int_V \chi(\mathbf{r}_m) u_{m-1}(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}_m, \quad m \geq 1, \quad (7.4.12)$$

где \mathbf{r}_m — переменный вектор, пробегающий объем рассеяния V , а G_0 — функция Грина свободного пространства:

$$G_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}. \quad (7.4.13)$$

При $g \equiv 0$ уравнение (7.4.9) допускает следующее решение в виде плоской волны:

$$u_0 = Ae^{ik\mathbf{r}}, \quad (7.4.14)$$

где A — постоянная. Тогда из (7.4.12) имеем

$$u_1 = -Ak^2 \int_V \chi(\mathbf{r}_1) e^{ik\mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (7.4.15)$$

$$u_2 = Ak^4 \int_V \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) e^{ik\mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (7.4.16)$$

$$u_m = A(-1)^m k^{2m} \int_V \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) \times \\ \times e^{ik\mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \dots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_m. \quad (7.4.17)$$

Член εu_1 в этом разложении называется первым приближением Борна, а член $\varepsilon^m u_m$ — m -м приближением Борна.

Если χ — центрированная случайная функция \mathbf{r} , то среднее значение функции u можно получить, усреднив (7.4.8). В результате будем иметь

$$\langle u \rangle = Ae^{ik\mathbf{r}} + A\varepsilon^2 k^4 \int_V \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \rangle e^{ik\mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \dots + \\ + A(-\varepsilon)^m k^{2m} \int_V \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle \times \\ \times e^{ik\mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \dots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_m + \dots \quad (7.4.18)$$

Усредненные величины $\langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle$ зависят от расположения точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$, так как для большинства случайных

сред существует масштаб корреляции l (т. е. значения χ в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии, превышающем l , не коррелированы). Чтобы получить зависимость от масштаба корреляции, разложим эти усредненные величины в ряды по расширяющимся группам переменных следующего вида:

$$\begin{aligned}\langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \rangle &= R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \chi(\mathbf{r}_3) \rangle &= R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \chi(\mathbf{r}_3) \chi(\mathbf{r}_4) \rangle &= R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + \\ &\quad + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle &= \sum_{k_1 + \dots + k_s = m} R(\xi_1, \dots, \xi_{k_1}) R(\xi_1, \dots, \xi_{k_s}) \times \\ &\quad \times R(\eta_1, \dots, \eta_{k_s}),\end{aligned}\quad (7.4.19)$$

где $k_i \geq 2$. Так, суммирование в последнем уравнении проводится по всем возможным разбиениям множества точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ на группы, содержащие по крайней мере две точки. Если χ — центрированная гауссовская случайная функция, то все корреляционные функции обратятся в нуль, за исключением двухточечных корреляционных функций. С помощью (7.4.19) и (7.4.18) можно получить для $\langle u \rangle$ выражение, зависящее от k -точечных корреляционных функций.

При $g \neq 0$ частное решение уравнения (7.4.9) имеет вид

$$u_0(\mathbf{r}) = Mg = \int_V g(\mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0. \quad (7.4.20)$$

Тогда из (7.4.12) имеем

$$\begin{aligned}u_m(\mathbf{r}) &= (-1)^m k^{2m} \int_V g(\mathbf{r}_0) \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) \times \\ &\quad \times G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \dots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_m\end{aligned}\quad (7.4.21)$$

или, в операторной форме,

$$u_m = (-k^2 M \chi)^m Mg, \quad (7.4.22)$$

где оператор M определен в (7.4.20). Поэтому имеет место

$$u(\mathbf{r}) = Mg + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m (-k^2 M \chi)^m Mg. \quad (7.4.23)$$

Этот ряд математики называют также рядом Неймана. К этому ряду можно прийти также, обратив соотношение (7.4.3) в интегральное уравнение

$$u = Mg - \varepsilon k^2 M \chi u \quad (7.4.24)$$

и решая его методом последовательных приближений.

Из (7.4.23) можно определить функцию Грина G для уравнения (7.4.3) в виде

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \varepsilon k^2 \int \chi(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 + \\ + \varepsilon^2 k^4 \int \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\ + \dots + (-1)^m \varepsilon^m k^{2m} \int \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) \times \\ \times G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \dots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_m + \dots \quad (7.4.25)$$

В операторной форме эта функция будет иметь вид

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} (G_0 \mathcal{L})^m G_0, \quad \mathcal{L} \varphi \rightarrow -\varepsilon k^2 \chi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}). \quad (7.4.26)$$

Этот ряд был представлен Фришем [1968] с помощью, как он назвал, „голой“ диаграммы. При этом он использовал следующие условные обозначения: G_0 представляется сплошной линией, а \mathcal{L} — точкой. Тогда G представляется диаграммным рядом

$$G = \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_0} + \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \dots \quad (7.4.27)$$

Этот ряд физически интерпретируется с помощью многократного рассеяния. Член с номером m соответствует волне, которая свободно распространяется от \mathbf{r}_0 к \mathbf{r}_1 , рассеивается на неоднородностях в \mathbf{r}_1 , распространяется свободно до \mathbf{r}_2 , рассеивается на \mathbf{r}_2 и так далее. Фриш [1968] представил двойную функцию Грина (тензорное произведение функции G на комплексно сопряженную величину)

$$G \otimes \bar{G} = G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \bar{G}(\xi; \xi_0)$$

в виде следующего ряда двойных „голых“ диаграмм:

$$G \otimes \bar{G} = \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_0} \quad \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} \quad \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \dots \\ \overline{\xi \quad \xi_0} \quad \overline{\xi \quad \xi_1 \quad \xi_0} \quad \overline{\xi \quad \xi_2 \quad \xi_1 \quad \xi_0} + \dots \quad (7.4.28)$$

Здесь каждая двойная диаграмма соответствует тензорному произведению оператора, представляемого верхней линией, на опе-

ратор, комплексно сопряженный оператору, представляемому нижней линией.

Если χ — центрированный случайный процесс, то $\langle G \rangle$ может быть представлено следующим „одетым“ диаграммным рядом (Фриш, [1968]):

$$\langle G \rangle = \text{1} + \text{2} + \text{3} + \text{4} + \text{5} + \text{6} + \text{7} + \dots \quad (7.4.29)$$

В этом диаграммном ряде использованы следующие условные обозначения:

(1) Точки, принадлежащие данной группе, соединены пунктирной линией.

(2) Каждой „голой“ диаграмме, содержащей функцию χ в виде k множителей, мы сопоставляем столько „одетых“ диаграмм, сколько существует разных разбиений множества r_1, r_2, \dots, r_k на группы, содержащие по крайней мере две точки.

(3) Для вычисления по „одетой“ диаграмме сплошные линии следует заменить на G_0 , пучок пунктирных линий, оканчивающихся в r_1, r_2, \dots, r_s , — на множитель

$$(-ek^2)^s R(r_1, r_2, \dots, r_s),$$

а интегрирование следует проводить по всем промежуточным точкам. Так, имеем

$$\text{r} \quad \text{r}_2 \quad \text{r}_1 \quad \text{r}_0 = \epsilon^2 k^4 \int G_0(r; r_2) G_0(r_2; r_1) G_0(r_1; r_0) R(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (7.4.30)$$

$$\text{r} \quad \text{r}_4 \quad \text{r}_3 \quad \text{r}_2 \quad \text{r}_1 \quad \text{r}_0 = \epsilon^4 k^8 \int G_0(r; r_4) G_0(r_4; r_3) G_0(r_3; r_2) G_0(r_2; r_1) G_0(r_1; r_0) \\ \times R(r_4, r_2) R(r_3, r_1) dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \quad (7.4.31)$$

Аналогично, ковариацию $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$ можно выразить в виде следующего ряда „одетых“ двойных диаграмм:

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (7.4.32)$$

Здесь имеем, например,

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \epsilon^4 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) \bar{G}_0(\xi; \xi_1) \bar{G}_0(\xi_1; \xi_0) \times R(\mathbf{r}_1, \xi_1) d\mathbf{r}_1 d\xi_1 \quad (7.4.33)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \epsilon^4 k^4 \bar{G}_0(\xi; \xi_0) \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) \times R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

В случае гауссовской случайной функции не обращаются в нуль только двухточечные корреляционные функции; следовательно, в (7.4.29) такие диаграммы, как 3 и 7, а в (7.4.32) такие, как 5, исчезают.

Представление формальных рядов возмущения с помощью диаграмм впервые применил Фейнман [1948]. Эти диаграммы, называемые диаграммами Фейнмана, широко используются в статистической термодинамике (см., например, Пригожин [1962]), в задаче многих тел (см., например, Ван Хов, Гугенхольц и Хауленд [1961]) и в квантовой электродинамике (см., например, Балеску [1963]). Для решения линейных стохастических уравнений диаграммы Фейнмана первым применил Крайхнан [1961]. При исследовании распространения волн в случайной среде диаграммы Фейнмана были введены в рассмотрение Бурре [1962a], [1962b], Фуруцу [1963] и Татарским [1964] для случая гауссовых процессов и Фришем [1965] — в общем случае.

Фриш [1968] показал, что разложения, полученные в этом пункте, являются расходящимися. Более того, он показал также, что эти разложения содержат вековые члены, из-за которых пригодность этих асимптотических разложений ограничивается малыми значениями аргумента. Поскольку величина $\langle \chi(\mathbf{r}_1) \times \chi(\mathbf{r}_2) \dots \chi(\mathbf{r}_{2m}) \rangle$ равна сумме двухточечных корреляционных функций в количестве $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)$, то это число слагаемых быстро растет с увеличением m , и это обстоятельство является еще одной причиной, обуславливающей расходимость разложений (7.4.29) и (7.4.32). Шкарофский [1971] модифицировал разложение Борна для случая обратного рассеяния на турбулентной плазме, чтобы исследовать явление насыщения и поперечной поляризации. Рэлей [1917] разработал метод улучшения равномерной пригодности таких разложений, с тем чтобы разложение, полученное им для однократного рассеяния на тонком слое, сделать пригодным для многих слоев. Эта методика называется перенормировкой. Она была развита и расширена рядом исследователей (см. следующий пункт).

7.4.2. Методы перенормировки

Чтобы проиллюстрировать природу неравномерности, которая может возникнуть в разложении Борна (Неймана), и наметить пути ее устранения, рассмотрим простой пример

$$u'' + k^2(\epsilon) u = 0, \quad u(0) = 1, \quad (7.4.34)$$

где k — постоянная, определяемая равенством

$$k = \sum_{n=0}^N \epsilon^n k_n. \quad (7.4.35)$$

Уходящие волны задаются точным соотношением

$$u = e^{ik(\epsilon)x} = \exp \left(ix \sum_{n=0}^N \epsilon^n k_n \right). \quad (7.4.36)$$

Однако разложение Борна, полученное для (7.4.34), имеет вид

$$\begin{aligned} u &= e^{ik_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(ix \sum_{n=1}^N \epsilon^n k_n \right)^m = \\ &= e^{ik_0 x} \left[1 + i\epsilon k_1 x + \epsilon^2 \left(ik_2 x - \frac{1}{2} k_1^2 x^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^3 \left(ik_3 x - k_1 k_2 x^2 - \frac{1}{6} ik_1^3 x^3 \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7.4.37)$$

Очевидно, что это разложение пригодно только для коротких расстояний и нарушается, когда значения $k_1 x$ имеют порядок

$O(\varepsilon^{-1})$ или больший. Источник неравномерности можно обнаружить, сравнив это разложение Борна с точным решением (7.4.36).

Разложив в точном решении выражение $\exp\left(ix \sum_{n=1}^N \varepsilon^n k_n\right)$ в ряд

Тейлора по величине $ix \sum_{n=1}^N \varepsilon^n k_n$, разложив, далее, выражение

$\left(\sum_{n=1}^N \varepsilon^n k_n\right)^m$ по степеням ε и сгруппировав члены с одинаковой

степенью ε , можно получить из точного решения разложение Борна. Хотя ряд Тейлора, полученный разложением $\exp \varphi$ по φ , сходится равномерно и абсолютно для всех значений φ , конечным числом членов ряда нельзя приблизить значение $\exp \varphi$ с заданной точностью для всех значений φ . Следовательно, любое равномерно пригодное для всех φ разложение функции $\exp \varphi$ должно совпадать с самой функцией $\exp \varphi$. Таким образом, чтобы из (7.4.37) получить разложение, равномерно пригодное для значений x порядка $O(\varepsilon^{-1})$, следует просуммировать последовательность

$$1 + i\varepsilon k_1 x + \dots + (i\varepsilon k_1 x)^m / m! + \dots$$

Эта сумма равна $\exp(ik_1 x)$. Тогда (7.4.37) принимает вид

$$\begin{aligned} u &= \exp[i(k_0 + \varepsilon k_1)x] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(ix \sum_{n=2}^N \varepsilon^n k_n \right)^m = \\ &= \exp[i(k_0 + \varepsilon k_1)x] \left(1 + i\varepsilon^2 k_2 x + i\varepsilon^3 k_3 x - \frac{1}{2} \varepsilon^4 k_2^2 x^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (7.4.38)$$

Это разложение нарушается при $k_2 x = O(\varepsilon^{-2})$. Чтобы увеличить область пригодности этого разложения до значений $x = O(\varepsilon^{-2})$,

следует просуммировать последовательность $\sum_{m=0}^{\infty} (i\varepsilon^2 k_2 x)^m / m!$. Если не известна явная функциональная зависимость, то эффективным методом суммирования этих последовательностей является метод многих масштабов гл. 6. Суммирование вековых членов можно также произвести другим способом — методом перенормировки.

Метод перенормировки был первоначально разработан Рэлеем [1917] с целью обобщить свои результаты по рассеянию на тонком слое на рассеяние на многих слоях. Для однократного рассеяния на одном слое он получил разложение вида

$$u = e^{ik_0 x} (1 + i\varepsilon \mu x). \quad (7.4.39)$$

Чтобы получить решение, пригодное для многих слоев, он придал этому разложению вид экспоненты, т. е. записал его в виде

$$u = \exp[i(k_0 + \varepsilon \mu)x]. \quad (7.4.40)$$

Таким способом он эффективно вычислил сумму $\sum_{m=1}^{\infty} (i\epsilon \mu x)^m / m!$ последовательности вековых членов. Процесс суммирования разложений с целью сделать их „более“ равномерно пригодными называется перенормировкой. Эта методика была заново открыта Притуло [1962], о чем говорилось в § 3.4.

Чтобы расширить область равномерной пригодности двучленного разложения Борна $u = u_0 + \epsilon u_1$, придадим ему следующий экспоненциальный вид:

$$u = u_0 e^{\epsilon u_1 / u_0}. \quad (7.4.41)$$

Если для u_0 имеем $u_0 = A_0 \exp i S_0(\mathbf{r})$, то тогда

$$u = A e^{i S(r)}, \quad (7.4.42)$$

где $A = A_0 \exp[\epsilon \operatorname{Re}(u_1/u_0)]$ и $S = S_0 + \epsilon \operatorname{Im}(u_1/u_0)$.

Метод перенормировки был расширен, что позволило получить кинетические уравнения для слабо нелинейных систем (см., например, Ван Хов [1955], [1957]; Пригожин [1962]; Балеску [1963]; Альтшуль и Карпман [1965]). В соответствии с этим методом последовательности вековых членов выделяются и суммируются с применением диаграмм Фейнмана или без них. Суммирование главных последовательностей вековых членов приводит к квазилинейным уравнениям.

Метод перенормировки широко применялся также при изучении распространения волн в случайных средах (см., например, Татарский [1959, глава 6]; Келлер [1962]; Карал и Келлер [1964]). Итак, чтобы расширить область равномерной пригодности разложения для $\langle G \rangle$ из (7.4.29), придадим величине $\langle G \rangle$ экспоненциальный вид

$$\langle G \rangle = G_0 e^{\psi}. \quad (7.4.43)$$

Следовательно, первая перенормировка дает

$$\psi = \frac{G_2}{G_0}, \quad (7.4.44)$$

где



$$G_2 = \epsilon^2 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7.4.45)$$


Бурре [1962a], [1962b], Фуруцу [1963], Татарский [1964] и Фриш [1965] использовали диаграммный метод суммирования для нахождения уравнений перенормировки произвольного порядка. Татарский [1964] расположил диаграммы для $\langle G \rangle$ и $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$ таким образом, что удалось обнаружить, что эти диаграммы соответствуют разложениям Неймана для двух интеграль-

ных уравнений с двумя ядрами, имеющими бесконечное число членов. Для случая, когда показатель преломления является централизованной гауссовской величиной, диаграммное разложение для $\langle G \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \langle G \rangle = & \overset{1}{-} + \overset{2}{+} \text{ (diagram 2) } + \overset{3}{+} \text{ (diagram 3) } + \overset{4}{+} \text{ (diagram 4) } + \overset{5}{+} \text{ (diagram 5) } + \overset{6}{+} \text{ (diagram 6) } \\
 & + \overset{7}{+} \text{ (diagram 7) } + \overset{8}{+} \text{ (diagram 8) } + \overset{9}{+} \text{ (diagram 9) } \\
 & + \overset{10}{+} \text{ (diagram 10) } + \overset{11}{+} \text{ (diagram 11) } \\
 & + \overset{12}{+} \text{ (diagram 12) } + \overset{13}{+} \text{ (diagram 13) } + \overset{14}{+} \text{ (diagram 14) } \\
 & + \overset{15}{+} \text{ (diagram 15) } + \overset{16}{+} \text{ (diagram 16) } + \overset{17}{+} \text{ (diagram 17) } \\
 & + \overset{18}{+} \text{ (diagram 18) } + \overset{19}{+} \text{ (diagram 19) } + \overset{20}{+} \text{ (diagram 20) }
 \end{aligned}
 \tag{7.4.46}$$

Для получения интегрального уравнения для $\langle G \rangle$ с ядром, состоящим из бесконечного ряда, рассмотрим топологию диаграмм в (7.4.46). Введем следующие определения.

(1) Диаграммой без концов будем называть диаграмму с удаленными внешними отрезками сплошных линий. Так, например, диаграмма 2 без концов имеет вид , а диаграмма 4 без концов имеет вид .

(2) Диаграмма без концов называется связной, если ее нельзя разбить на две или более диаграммы, не разрывая ни одной пунктирной линии. Диаграммы 4, 5, 10, 11 и 13—20 являются связными, в то время как диаграммы 3, 6, 7, 8, 9 и 12 не являются связными. Несвязные диаграммы могут быть разбиты на множители; например, диаграмма 

может быть записана в виде произведения следующих пяти диаграмм:



(3) Массовым оператором Q , обозначаемым через \bullet , называется сумма всевозможных связных диаграмм, входящих в $\langle G \rangle$; т. е. имеем

$$\bullet = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots \quad (7.4.47)$$

Все несвязные диаграммы, состоящие из двух связных диаграмм, встречаются в сумме диаграмм вида $\bullet \text{---} \bullet$, а все несвязные диаграммы, состоящие из трех связных диаграмм, встречаются в сумме диаграмм вида $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$. Из сказанного следует, что величина $\langle G \rangle$, обозначаемая линией --- , описывается следующим уравнением Дайсона (Татарский [1964]):

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \quad (7.4.48)$$

или в аналитическом виде

$$\langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7.4.49)$$

Аналогичное уравнение, введенное впервые Дайсоном [1949], широко использовалось в квантовой электродинамике, квантовой теории поля и в задаче многих тел. Если функция χ однородна, то массовый оператор Q инвариантен по отношению к переносу и представляет собой оператор свертки, преобразование Фурье которого является оператором умножения на обычные функции. Следовательно, совершив преобразование Фурье в (7.4.49), получим

$$\langle G(\kappa) \rangle = \frac{1}{k^2 - \kappa^2} + \frac{1}{k^2 - \kappa^2} Q(\kappa) \langle G(\kappa) \rangle, \quad (7.4.50)$$

когда скоро

$$G_0(\kappa) = \frac{1}{k^2 - \kappa^2}. \quad (7.4.51)$$

Разрешая уравнение (7.4.50) относительно $\langle G(\kappa) \rangle$, получим

$$\langle G(\kappa) \rangle = \frac{1}{k^2 - \kappa^2 - Q(\kappa)}. \quad (7.4.52)$$

Таким образом, при известном Q величина $\langle G \rangle$ может быть найдена обращением $\langle G(\kappa) \rangle$. Однако точное выражение для Q

так же трудно найти, как и выражение для $\langle G \rangle$. Поэтому прибегают к приближенным методам определения Q . Простейшее приближение, основанное на уравнении Дайсона, соответствует удерживанию в массовом операторе только первого члена. Имеем при этом

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \quad (7.4.53)$$

или, в аналитическом виде,

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle &= \\ &= G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \varepsilon^2 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) \rangle a_{\mathbf{r}_1} a_{\mathbf{r}_2}. \end{aligned} \quad (7.4.54)$$

Это уравнение, называемое первым уравнением перенормировки, в диаграммном виде было введено в рассмотрение Бурре [1962a], [1962b].

Следует отметить, что уравнения (7.4.49) и (7.4.54) не могут быть решены методом итераций, поскольку это привело бы к появлению вековых членов. Варватсис и Сансер [1971] получили приближенное решение уравнения (7.4.54) в виде

$$\langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) e^{\varepsilon^2 G_2 / G_0}, \quad (7.4.55)$$

где

$$G_2 = k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7.4.56)$$

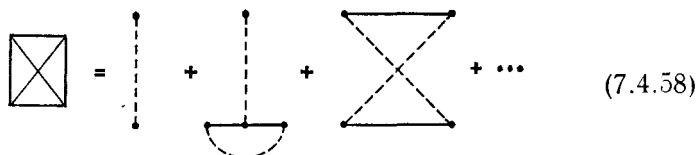
Это решение равным образом годно как для однородных, так и для неоднородных сред. Мы пришли бы к этому же решению, записав выражение $\langle G \rangle = G_0 + \varepsilon^2 G_2$ в экспоненциальном виде.

С помощью диаграммной техники Татарский [1964] и Фриш [1968] получили следующее уравнение Бете—Салпетера для случая, когда показатель преломления является гауссовским центрированным процессом или имеет общий вид

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \text{---} + \text{---} \boxed{\times} \text{---} \langle G \otimes \bar{G} \rangle \quad (7.4.57)$$

Здесь оператор интенсивности $\boxed{\times}$ состоит из всех связных диаграмм без концов, входящих в разложение для $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$, т. е.

имеем



$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \quad (7.4.58)$$

Впервые это уравнение было введено Салпетером и Бете [1951] при рассмотрении релятивистских задач со связанным состоянием.

7.4.3. Метод Рытова

Для получения приближенного решения уравнения

$$\nabla^2 u + k^2 [1 + \varepsilon \chi(\mathbf{r})] u = 0 \quad (7.4.59)$$

положим, следуя Рытову [1937] (см. также Татарский [1959, стр. 121—128]; Чернов [1960, стр. 58—67]),

$$u = e^\psi \quad (7.4.60)$$

и преобразуем (7.4.59) к виду

$$\nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \psi + k^2 (1 + \varepsilon \chi) = 0. \quad (7.4.61)$$

Предположим теперь, что ψ допускает следующее асимптотическое разложение:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(\mathbf{r}). \quad (7.4.62)$$

Подставив (7.4.62) в (7.4.61) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\nabla^2 \psi_0 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 = -k^2, \quad (7.4.63)$$

$$\nabla^2 \psi_1 + 2 \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_0 = -k^2 \chi, \quad (7.4.64)$$

$$\nabla^2 \psi_n + \sum_{m=0}^n \nabla \psi_m \cdot \nabla \psi_{n-m} = 0, \quad n \geq 2, \quad (7.4.65)$$

Эти уравнения могут быть решены последовательно. Получающееся при этом разложение в точности соответствует разложению Борна $u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n$ для уравнения (7.4.59). Действительно, разложение Рытова может быть получено из ряда Борна, если последнему придать экспоненциальный вид. Полагая

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n = \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_m \right), \quad (7.4.66)$$

разлагая экспоненту при малых ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно получить для первых членов

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{\psi_0}, & u_1 &= e^{\psi_0} \psi_1, & u_2 &= e^{\psi_0} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \psi_1^2 \right), \\ u_3 &= e^{\psi_0} \left(\psi_3 + \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{6} \psi_1^3 \right). \end{aligned} \quad (7.4.67)$$

Таким образом, разложение Рытова представляет собой результат перенормировки разложения Борна и, следовательно, должно иметь более широкую область равномерной пригодности, чем разложение Борна. Однако этот вывод представляется спорным (Хафнагель и Стэнли [1964]; де Вольф [1965], [1967]; Браун [1966], [1967], Фрид [1967]; Хайдбрердер [1967]; Тейлор [1967]; Стробен [1968]; Сансер и Варватсис [1969], [1970]).

7.4.4. Приближение геометрической оптики

Целью нашего рассмотрения является получение асимптотического решения уравнения

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0 \quad (7.4.68)$$

для больших волновых чисел k (т. е. для малых длин волн $\lambda = 2\pi/k$). Для больших k решение уравнения (7.4.68) допускает асимптотическое разложение вида (Келлер [1958])

$$u = e^{ikS(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^{-m} u_m(\mathbf{r}). \quad (7.4.69)$$

Подставляя (7.4.69) в (7.4.68) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , получаем

$$\nabla S \cdot \nabla S = n^2(\mathbf{r}), \quad (\text{уравнение эйконала}) \quad (7.4.70)$$

$$2\nabla S \cdot \nabla u_0 + u_0 \nabla^2 S = 0, \quad (\text{уравнения переноса}) \quad (7.4.71)$$

$$2\nabla S \cdot \nabla u_m + u_m \nabla^2 S = -\nabla^2 u_{m-1} \quad \text{для } m \geq 1. \quad (7.4.72)$$

Уравнение (7.4.70) может быть решено методом характеристик, т. е. с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} &= 2\lambda \nabla S, \\ \frac{dS}{d\sigma} &= 2\lambda n^2, \end{aligned} \quad (7.4.73)$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\nabla S) = \lambda \nabla(n^2),$$

где σ — параметр, а λ — множитель пропорциональности. Исключив ∇S из первого и третьего уравнений, получим

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{2\lambda} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) = 2\lambda n \nabla n. \quad (7.4.74)$$

Тогда решение второго уравнения в (7.4.73) имеет вид

$$S = S_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} 2\lambda n^2 [\mathbf{r}(\tau)] d\tau, \quad (7.4.75)$$

где $\mathbf{r}(\sigma)$ — решение уравнения (7.4.74) при начальных условиях $\mathbf{r}(\sigma_0) = \mathbf{r}_0$, $d\mathbf{r}(\sigma_0)/d\sigma = \dot{\mathbf{r}}_0$. Положив $2\lambda = n^{-1}$ и считая σ длиной дуги вдоль лучей, можем переписать (7.4.74) и (7.4.75) в виде

$$\frac{d}{d\sigma} \left[n(\mathbf{r}(\sigma)) \frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} \right] = \nabla n, \quad (7.4.76)$$

$$S = S_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n[\mathbf{r}(\tau)] d\tau. \quad (7.4.77)$$

Вдоль лучей уравнение (7.4.71) принимает вид

$$2n[\mathbf{r}(\sigma)] \frac{du_0}{d\sigma} + u_0 \nabla^2 S[\mathbf{r}(\sigma)] = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$u_0 = u_0[\mathbf{r}(\sigma_0)] \exp \left\{ - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\nabla^2 S[\mathbf{r}(\tau)]}{2n[\mathbf{r}(\tau)]} d\tau \right\}. \quad (7.4.78)$$

Аналогично, решением уравнения (7.4.72) будет функция

$$u_m = c \frac{u_0[\mathbf{r}(\sigma)]}{u_0[\mathbf{r}(\sigma_0)]} - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\nabla^2 u_{m-1}[\mathbf{r}(\tau)]}{2n[\mathbf{r}(\tau)]} \frac{u_0[\mathbf{r}(\sigma)]}{u_0[\mathbf{r}(\tau)]} d\tau, \quad (7.4.79)$$

где c — постоянная, определяемая из начальных условий.

Разложение, полученное в этом пункте, является непригодным на каустике (т. е. на поверхности, огибающей лучи), на границах тени, в фокусах лучей и в окрестности источников. В таких областях соседние лучи пересекаются, и площадь поперечного сечения трубки лучей обращается в нуль. Поскольку в трубке лучей энергия сохраняется, амплитуда поля в этих областях должна быть бесконечной. Ниже будет показано, что на каустике поле является неограниченным; в следующем пункте будет получено разложение, пригодное всюду, в том числе и на каустике.

Для того чтобы показать, что разложение этого пункта нарушается на каустике или в ее окрестности, рассмотрим частный случай $n(\mathbf{r})=1$. Из (7.4.76) имеем, что в этом случае лучи являются прямыми линиями, а из (7.4.77) следует, что $S=S_0 - \sigma_0 + \sigma$. Выразим теперь решения уравнений (7.4.71) и (7.4.72)

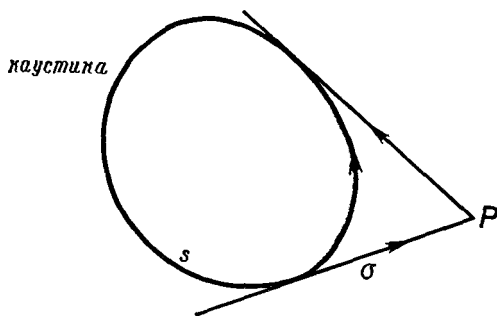


Рис. 7.1.

в координатной системе, отнесенной к каустике, которую будем предполагать гладкой и выпуклой. На рис. 7.1 изображена точка P , расположенная вне каустики, и два луча, проходящие через нее. Выбрав на каустике некоторое направление, мы тем самым введем направление на каждом луче, который обязательно касается каустики в некоторой ее точке. Таким образом, каждая точка P , лежащая вне каустики, располагается на двух лучах, один из которых направлен от каустики, другой направлен к ней.

Для двумерного случая обозначим через s длину дуги вдоль каустики и через σ — длину отрезка луча от точки касания до точки P . Таким образом, местоположение точки P определяется числами s_1 и σ_1 или s_2 и σ_2 . В этих координатах радиус-вектор \mathbf{r} точки P задается равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \sigma \mathbf{e}_1, \quad (7.4.80)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$ — уравнение каустики, а $\mathbf{e}_1 = d\mathbf{r}_0/ds$ — единичный вектор, касательный к каустике. Поскольку $d\mathbf{e}_1/ds = \rho^{-1}\mathbf{e}_2$, где ρ^{-1} — кривизна в соответствующей точке каустики, то, дифференцируя (7.4.80), будем иметь

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 ds + \mathbf{e}_1 d\sigma + \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{e}_2 ds.$$

Заменив переменные σ и s на

$$\xi = s, \quad \eta = s + \sigma, \quad (7.4.81)$$

получим

$$dr = e_1 d\eta + \frac{\eta - \xi}{\rho} e_2 d\xi. \quad (7.4.82)$$

Следовательно, имеем

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \eta} e_1 + \frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} e_2, \quad (7.4.83)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\eta - \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\eta - \xi) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] + \frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right]. \quad (7.4.84)$$

С помощью равенств, получаемых из (7.4.81),

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

можно переписать (7.4.83) и (7.4.84) в виде

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} e_1 + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) e_2, \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left[\frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.85)$$

Рассмотрев частный случай $S(s, \sigma_0) = s + \sigma_0$, будем иметь

$$S(s, \sigma) = s + \sigma. \quad (7.4.86)$$

Эта функция является двузначной в соответствии с тем, направлен ли луч от каустики или к ней. Используя в (7.4.78) и (7.4.79) соотношения (7.4.85) и (7.4.86), получим

$$u_0(s, \sigma) = u_0(s, \sigma_0) \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}}, \quad (7.4.87)$$

$$u_m(s, \sigma) = u_m(s, \sigma_0) \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}} - \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \nabla^2 u_{m-1}(s, \tau) d\tau. \quad (7.4.88)$$

Эти функции не ограничены при $\sigma \rightarrow 0$ (т. е. на каустике). Модифицированное разложение, пригодное всюду, включая и окрестность каустики, получено в следующем пункте.

7.4.5. Равномерное разложение на каустике

Для нахождения разложения, пригодного на каустике, мы должны в первую очередь определить размеры области неравномерности и форму решения в этой области. Положим с этой целью в (7.4.68)

$$u = \psi(r, k) e^{ikS(r)} \quad (7.4.89)$$

и, полагая $n(r) = 1$, получим

$$k^2 \psi [1 - (\nabla S)^2] + ik (2 \nabla S \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 S) + \nabla^2 \psi = 0. \quad (7.4.90)$$

Предполагая, что главным является член, пропорциональный k^2 , получим

$$\nabla S \cdot \nabla S = 1 \quad (\text{уравнение эйконала}), \quad (7.4.91)$$

$$ik (2 \nabla S \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 S) + \nabla^2 \psi = 0. \quad (7.4.92)$$

Возьмем в качестве решения уравнения (7.4.91) функцию $S = s + \sigma$. Тогда (7.4.92) примет вид

$$\left\{ ik \left(2 \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left[\frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] \right\} \psi = 0. \quad (7.4.93)$$

Чтобы выявить характер решения уравнения (7.4.93) в окрестности каустики, подвергнем это уравнение преобразованию растяжения

$$\tau = k^\lambda \sigma, \quad \lambda > 0,$$

и получим

$$ik^{1+\lambda} \left(2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \psi + \left\{ \frac{k^{2\lambda}}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\rho k^{2\lambda}}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial s} - k^\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial s} - k^\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] \right\} \psi = 0. \quad (7.4.94)$$

Параметр λ определяется из требования, чтобы наибольшая степень k в выражении в фигурных скобках (в том выражении, которым мы пренебрегли в главном члене прямого разложения в предыдущем пункте) была бы равна степени k в первом члене (т. е. в главном члене при разложении по лучу). Это означает, что мы полагаем

$$1 + \lambda = 4\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{3}. \quad (7.4.95)$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ уравнение (7.4.94) стремится к виду

$$i \left(2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\psi}{\tau} \right) + \frac{\rho^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (7.4.96)$$

Полагая в нем

$$\psi = e^{-i\tau^3/3\rho^3} V(z), \quad z = \frac{\tau^2}{\rho \sqrt[3]{4\rho}}, \quad (7.4.97)$$

придем к уравнению

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + zV = 0, \quad (7.4.98)$$

решениями которого являются функции Эйри $Ai(-z)$ и $Bi(-z)$ (см. п. 7.3.1). Если бы мы проанализировали поведение решения в окрестности границы тени, мы бы нашли, что решение должно быть выражено в функциях Вебера или функциях параболического цилиндра. Теперь мы можем либо срастить это внутреннее разложение с внешним разложением, полученным в предыдущем разделе, и с другим внешним разложением внутри каустики (Бюшал и Келлер [1960]), либо построить одно равномерно пригодное разложение по примеру разложений в задачах с точкой возврата (см. § 7.3).

Следуя Кравцову [1964a], [1964b], Людвигу [1966] и Заудеру [1970b], будем искать асимптотическое разложение вида

$$u = e^{ik\theta(\mathbf{r})} \left\{ g(\mathbf{r}, k) V[k^{2/3}\varphi(\mathbf{r})] + \frac{1}{ik^{1/3}} h(\mathbf{r}, k) V'[k^{2/3}\varphi(\mathbf{r})] \right\}, \quad (7.4.99)$$

где θ и φ определяются в процессе вычислений, а $V(z)$ задается с помощью (7.4.98). Подставив (7.4.99) в (7.4.68), используя равенство $V''' + zV' + V = 0$ и приравнявая нулю коэффициенты при V и V' , получим

$$-k^2 g [(\nabla\theta)^2 + \varphi(\nabla\varphi)^2 - 1] - 2k^2 \varphi h \nabla\theta \cdot \nabla\varphi + ik [2\nabla\theta \cdot \nabla g + g \nabla^2\theta + 2\varphi \nabla\varphi \cdot \nabla h + \varphi h \nabla^2\varphi + h(\nabla\varphi)^2] + \nabla^2 g = 0, \quad (7.4.100)$$

$$-k^2 h [(\nabla\theta)^2 + \varphi(\nabla\varphi)^2 - 1] - k^2 g \nabla\theta \cdot \nabla\varphi + ik [2\nabla\varphi \cdot \nabla g + g \nabla^2\varphi + 2\nabla\theta \cdot \nabla h + h \nabla^2\theta] + \nabla^2 h = 0. \quad (7.4.101)$$

Коэффициенты при k^2 в (7.4.100) и (7.4.101) обращаются в нуль при условиях

$$\begin{aligned} (\nabla\theta)^2 + \varphi(\nabla\varphi)^2 &= 1, \\ \nabla\theta \cdot \nabla\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.102)$$

Чтобы решить получающиеся уравнения, положим в них

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, k) &= g_0(\mathbf{r}) + k^{-1}g_1(\mathbf{r}) + \dots, \\ h(\mathbf{r}, k) &= h_0(\mathbf{r}) + k^{-1}h_1(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.103)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k^{-1} . Уравнения первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} 2\nabla\theta \cdot \nabla g_0 + g_0 \nabla^2\theta + 2\varphi \nabla\varphi \cdot \nabla h_0 + \varphi h_0 \nabla^2\varphi + h_0(\nabla\varphi)^2 &= 0, \\ 2\nabla\varphi \cdot \nabla g_0 + g_0 \nabla^2\varphi + 2\nabla\theta \cdot \nabla h_0 + h_0 \nabla^2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.104)$$

Уравнения (7.4.102) эквивалентны уравнению эйконала (7.4.70), в то время как уравнения (7.4.104) эквивалентны уравнению переноса (7.4.71). Аналогичные уравнения получил Фаукес [1968, часть II] с помощью метода многих масштабов.

Система (7.4.102) представляет собой нелинейную систему уравнений, которая является эллиптической при $\varphi < 0$ (тенивая

область), гиперболической при $\varphi > 0$ (освещенная область) и параболической при $\varphi = 0$ (каустическая кривая или поверхность). Для выпуклой и аналитической каустики системы (7.4.102) и (7.4.104) могут быть решены разложением величин θ и φ в степенные ряды в координатной системе, отнесенной к каустике.

Для того чтобы увидеть связь между системой (7.4.102) и уравнением эйконала (7.4.70), умножим второе уравнение в (7.4.102) на $\pm 2\sqrt{\varphi}$ (мы рассматриваем освещенную область, в которой $\varphi > 0$) и результат сложим с первым из этих уравнений. Получим уравнение

$$(\nabla\theta \pm \sqrt{\varphi} \nabla\varphi)^2 = 1,$$

которое можно записать в виде

$$(\nabla S)^2 = 1, \quad (7.4.105)$$

где

$$S^\pm = \theta \pm \frac{2}{3} \varphi^{3/2}. \quad (7.4.106)$$

Аналогичным образом, умножив второе уравнение в (7.4.104) на $\pm\sqrt{\varphi}$, сложив результат с первым из этих уравнений и используя равенство $\nabla\theta \cdot \nabla\varphi = 0$, получим

$$2\nabla S^\pm \cdot \nabla\psi^\pm + \left[\nabla^2 S^\pm \mp \frac{1}{2} \varphi^{-1/2} (\Delta\varphi)^2 \right] \psi^\pm = 0, \quad (7.4.107)$$

где

$$\psi^\pm = g_0 \pm \sqrt{\varphi} h_0. \quad (7.4.108)$$

Уравнение (7.4.107) отличается от уравнения переноса (7.4.71) только наличием члена $\pm (1/2) \varphi^{-1/2} (\nabla\varphi)^2$, из-за которого коэффициент при ψ^\pm становится ограниченным в окрестности каустики.

Заменив V и V' их асимптотическими разложениями для больших значений аргумента, придем к разложению геометрической оптики, полученному в предыдущем пункте (для случая освещенной области, $\varphi > 0$). Заменив V и V' их асимптотическими разложениями для больших значений аргумента в случае $\varphi < 0$, получим некоторое разложение в теневой области, которое может быть интерпретировано с помощью комплексных лучей, фаз и коэффициентов переноса.

Обзор работ по равномерным асимптотическим разложениям в задачах распространения волн и дифракции был дан Людвигом [1970b] и Бабишем [1970], [1971]. Роль координатных систем в приведении разложений к равномерно пригодному виду была исследована Заудерером [1970a].

Бабич [1965] получил единое равномерно пригодное разложение для задачи о точечном источнике, в то время как Авила и Келлер [1963] для нее получили сращивание трех разложений.

Заудерер [1964b], Буслаев [1964], Гримшоу [1966], Людвиг [1967], Льюис, Блайстайн и Людвиг [1967], в числе других авторов, рассматривали задачи дифракции на выпуклых телах. Дифракция на прозрачном теле была исследована Ральфом [1968].

Равномерные разложения в задаче дифракции вблизи вогнутой стороны некоторого тела (колебания типа шепчущей галереи) были получены, в числе других авторов, Кравцовым [1964b], Матковским [1966], Людвигом (1970a).

Характеристические переходные области, в которых две каустики расположены близко друг к другу, аналогичны точкам возврата второго порядка. В этих случаях в равномерные разложения входят функции Вебера или функции параболического цилиндра. Некоторые задачи указанного типа изучены Кравцовым [1965], Бабичем и Кравцовой [1967], Вайнштейном [1969] и Заудерером [1970a], [1970b].

Дифракцию на тонком экране (дифракцию Френеля) исследовали Вольф [1967], Керстен [1967], Алувалиа, Льюис и Боерсма [1968].

Области многократного перехода возникают при касательном пересечении двух или более каустик и границ тени, как, например, вблизи границ каустик (Леви и Фельзен [1967]), угловых точек на каустиках (Людвиг [1966]) и точек дифракции гладких тел (Людвиг [1967]). Задачи с переходными областями, в числе других авторов, исследовали Заудерер [1964a], [1970a], Фок [1965], Ральф [1967] и Блайстайн [1967].

7.4.6. Метод сглаживания

Для того чтобы применить эту методику к уравнению (7.4.3) с центрированной случайной функцией $n^2(\mathbf{r})$, преобразуем сначала его в интегральное уравнение

$$u = Mg - \epsilon k^2 M \chi u. \quad (7.4.109)$$

Здесь оператор M определен равенством

$$Mg = \int_V g(\mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (7.4.110)$$

где G_0 — функция Грина свободного пространства. Фриш [1968] показал, что многие другие линейные уравнения математической физики, такие, как уравнение Лиувилля для системы взаимодействующих классических частиц, уравнение Хопфа в теории турбулентности и уравнение Фоккера — Планка, могут быть сведены к интегральному уравнению вида (7.4.109).

Вообще говоря, для нас представляет интерес не сама функция u , а ее проекция Pu на некоторое подпространство исходного пространства, на котором определена функция u . Например, в задаче распространения волн в случайной среде можно считать $Pu = \langle u \rangle$, а в случае N взаимодействующих частиц проекция Pu представляет собой функцию распределения скоростей для системы N частиц, полученную интегрированием u по всем пространственным координатам. Введем обозначение

$$Pu = u_c, \quad u_i = (I - P)u. \quad (7.4.111)$$

В задачах распространения волн в случайных средах u_c представляет собой когерентную составляющую поля (среднее значение), в то время как u_i представляет собой некогерентную составляющую (флуктуирующую составляющую). Для детерминированной функции g и центрированной случайной функции χ имеем

$$Pg = g, \quad PM = MP, \quad P\chi P = 0. \quad (7.4.112)$$

Действуя оператором P на (7.4.109) слева, получим

$$u_c = Mg - \epsilon k^2 MP\chi(Pu + u_i) = Mg - \epsilon k^2 MP\chi u_i. \quad (7.4.113)$$

Действуя опять-таки на (7.4.109) оператором $I - P$ слева, получим

$$\begin{aligned} u_i &= -\epsilon k^2 M(I - P)\chi(u_c + u_i) = \\ &= -\epsilon k^2 M(I - P)\chi u_c - \epsilon k^2 M(I - P)\chi u_i. \end{aligned} \quad (7.4.114)$$

Применив для решения (7.4.114) формально метод последовательных приближений, получим следующую зависимость u_i от u_c :

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n u_c. \quad (7.4.115)$$

Подставив это выражение для u_i в (7.4.113), будем иметь

$$u_c = Mg - \left\{ \epsilon k^2 MP\chi \sum_{n=1}^{\infty} [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n \right\} u_c.$$

Поскольку $u_c = Pu_c$, то это уравнение можно записать в виде

$$u_c = Mg + MQu_c, \quad (7.4.116)$$

где

$$Q = - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon k^2 P\chi [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n P. \quad (7.4.117)$$

Для случайных операторов уравнение (7.4.116) представляет собой в точности уравнение Дайсона (7.4.49), в котором Q — массовый оператор.

Фриш [1968] назвал эту методику методом сглаживания, поскольку она является как бы аналогом метода усреднения (гл. 5), в котором зависимые переменные состоят из медленных и быстро-периодических слагаемых. Для стохастических уравнений эту методику впервые ввели Примас [1961], Эрнст и Примас [1963], Татарский и Герценштейн [1963]. Цванциг [1964] применил ее для уравнения Лиувилля.

Сглаживание первого порядка задается соотношением (7.4.116), в котором использован один член выражения (7.4.117), т. е. задается равенством

$$Q = \varepsilon^2 k^4 P \chi M (I - P) \chi P = \varepsilon^2 k^4 P \chi M \chi P.$$

Следовательно,

$$u_c = Mg + \varepsilon^2 k^4 M P \chi M \chi P u_c. \quad (7.4.118)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Буре (7.4.54) для линейных случайных сред и с уравнением Ландау для задачи Лиувилля (см., например, Пригожин [1962]). Для линейных случайных сред это первое приближение получили также Келлер [1962] и Кубо [1963].

Упражнения

7.1. Определить для больших значений x асимптотические разложения решений уравнений

$$(a) \ y'' - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0,$$

$$(б) \ y'' - \left(4x^2 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0,$$

$$(в) \ x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0,$$

$$(г) \ y'' + \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0,$$

$$(д) \ y'' + x y' + y = 0.$$

7.2. Определить для больших значений x асимптотические разложения решений уравнений

$$(a) \ y'' \pm \left(\frac{1}{4x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0,$$

$$(б) \ y'' \pm \left(\frac{9}{4}x + 1\right) y = 0,$$

$$(в) \ y'' + x y' + \frac{25}{4} x^3 y = 0,$$

$$(г) \ y'' + x^{-1/3} y' + x^{-2} y = 0.$$

7.3. Рассмотреть уравнение

$$y'' - \lambda^2 x^{-2} y = 0.$$

(а) Показать, что точное решение имеет вид

$$y = ax^{m_1} + bx^{m_2},$$

где $m_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\lambda^2 + 1/4}$.

(б) Определить первое приближение ВКБ.

(в) Сравнить это приближение с точным решением (Джеффрис, [1962]).

7.4. Определить первое приближение для больших λ в задаче на собственные значения

$$u'' + \lambda^2 f(x) u = 0, \quad f(x) > 0, \\ u(0) = u(1) = 0.$$

7.5. Рассмотреть уравнение

$$u'' + \left[f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n g_n(x) \right] u = 0.$$

Положить

$$u = w(x) e^{\varphi(x, \varepsilon)}, \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n(x),$$

где

$$w'' + f(x) w = 0.$$

Определить уравнение для φ и затем найти φ_n (Брулл и Соулер [1966]).

7.6. Определить равномерное асимптотическое разложение для решения уравнения

$$\ddot{u} + \omega^2(\varepsilon t) u = f(\varepsilon t),$$

где ε — малый параметр, а f — ограниченная непериодическая функция t .

7.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega^2(\varepsilon t) u = k \cos \varphi,$$

в котором $\varphi = \lambda(\varepsilon t)$. Определить равномерные асимптотические разложения для случаев: (а) значения λ не близки к ω ; (б) при некотором $t = t_0 > 0$ имеет место $\lambda = \omega$ (Кеворкян [1971]).

7.8. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} - i[\omega_1(\varepsilon t) + \omega_2(\varepsilon t)] \dot{u} - \omega_1(\varepsilon t) \omega_2(\varepsilon t) u = f(\varepsilon t),$$

где точки над буквой означают дифференцирование по t , а ε — малый параметр. Определить равномерные асимптотические приближения к решениям этого уравнения для случаев: (а) $f(\varepsilon t) = 0$; (б) $f(\varepsilon t)$ — ограниченная непериодическая функция t ; (в) $f(\varepsilon t) = k \exp(i\varphi)$, причем $\varphi = \lambda(\varepsilon t) \neq \omega_i$; (г) функция $f(\varepsilon t)$ имеет тот же вид, что и в пункте (в), но при некотором $t = t_0$ имеет место $\lambda = \omega_1$.

7.9. Определить равномерное асимптотическое разложение общего решения уравнения

$$\varepsilon^2 y'' + \varepsilon(2x+1)y' + 2xy = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

7.10. Функции Бесселя $J_n(nx)$, $Y_n(nx)$ и $H_n^{(1,2)}(nx)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + xy' + n^2(x^2 - 1)y = 0.$$

Определить равномерное асимптотическое разложение для общего решения этого уравнения при больших n .

7.11. Определить равномерные асимптотические разложения решений уравнения

$$y'' + \frac{x(1+x) - \varepsilon\alpha}{(1+x)^2} y = 0, \quad -1 < x < \infty,$$

при малом ε и α — постоянном.

7.12. Рассмотреть задачу Гретца о теплопроводности в трубе

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2(1-x^2)f(x)u &= 0, \\ u(1) = u(-1) &= 0, \end{aligned}$$

в которой $\lambda \gg 1$ и $f(x) = f(-x) > 0$. Определить первое приближение к λ и к собственным функциям, используя: (а) метод сращивания асимптотических разложений (Селлерс, Трибус и Клейн [1956]); (б) метод многих масштабов или преобразование Лангера (Найфэ [1965b]).

7.13. Дано, что $f(x) > 0$ и $\lambda \gg 1$. Определить первые приближения в следующих задачах на собственные значения:

$$(а) y'' + \lambda^2(1-x)f(x)y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) < \infty;$$

$$(б) xy'' + y' + \lambda^2 xf(x)y = 0,$$

$$y(1) = 0, \quad y(0) < \infty;$$

$$(в) y'' + \lambda^2(1-x)^n f(x)y = 0, \quad n — \text{натуральное число},$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) < \infty;$$

$$(г) xy'' + y' + \lambda^2 x^n f(x)y = 0, \quad n — \text{натуральное число},$$

$$y(1) = 0, \quad y(0) < \infty;$$

$$(д) y'' + \lambda^2(x-1)^n(2-x)^m f(x)y = 0, \quad m \text{ и } n — \text{натуральные числа},$$

$$y < \infty \text{ для всех } x.$$

7.14. Рассмотреть задачу Гретца о теплопроводности в трубе

$$\begin{aligned} ru'' + u' + \lambda^2 r(1-r^2)f(r)u &= 0, \\ u(1) &= 0, \quad u(0) < \infty, \end{aligned}$$

для случая, когда $\lambda \gg 1$ и $f(r) > 0$. (а) Определить разложение, пригодное вдали от точек $r=0$ и $r=1$; (б) определить разложения, пригодные в окрестности точек $r=0$ и $r=1$; (в) срастить эти три разложения, определить λ , получить равномерно пригодное составное разложение (Селлерс, Трибус и Клейн [1956]).

7.15. Вновь рассмотреть упражнение (7.14). (а) Определить с помощью преобразования Лангера разложение, пригодное вдали от точки $r=0$; (б) определить разложение, пригодное вдали от точки $r=1$, используя преобразование Олвера; (в) для нахождения λ срастить эти два разложения; (г) получить составное равномерно пригодное разложение; (д) сравнить полученные результаты с результатами упражнения 7.14.

7.16. Рассмотреть уравнение

$$y'' - \lambda^2 (x-1)(2-x)y = 0.$$

Определить приближенное решение этого уравнения при условии, что $\lambda \gg 1$ и $y < \infty$ для всех x .

7.17. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2 (1-x)^n (x-\mu)^m f(x) u &= 0, \\ u(1) &= u(\mu) = 0, \end{aligned}$$

в которой $\lambda \gg 1$, $f(x) > 0$, а n и m — натуральные числа, $\mu < 1$. Определить разложения, пригодные вдали от точек $x = \mu$ и $x = 1$, используя преобразование Олвера; сравтив их, найти λ ; построить составное разложение.

7.18. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} r u'' + \mu u' + \lambda r^n (1-r)^m f(r) u &= 0, \\ u(1) &= 0, \quad u(0) < \infty, \end{aligned}$$

в которой $\lambda \gg 1$, $f(r) > 0$, μ — действительное число, а n и m — натуральные числа. Используя преобразование Олвера, определить разложения, пригодные вдали от точек $r = 0$ и $r = 1$; сравтив их, найти λ ; построить составное разложение (Найфэ [1967а]).

7.19. Дано, что $f(x) > 0$ и $\lambda \gg 1$. Определить первые приближения в следующих задачах на собственные значения:

- (а) $xy'' + y' + \lambda^2 x(1-x)f(x)y = 0$,
 (б) $xy'' + y' + \lambda^2 x^n(1-x)^m f(x)y = 0$.

Здесь m и n — натуральные числа, а собственные функции удовлетворяют условию $y < \infty$ для $x \geq 0$.

7.20. Каким способом можно определить частное решение уравнения

$$u'' + \lambda^2 z^3 u = \lambda^2 g(z)$$

при $\lambda \gg 1$ в следующих случаях: (а) $g(0) \neq 0$; (б) $g(0) = 0$, но $g'(0) \neq 0$; (в) $g(0) = g'(0) = 0$, но $g''(0) \neq 0$; (г) $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$?

Список литературы

Абловитц, Бенни (Ablowitz M. J., Benney D. J.)

- [1970] The evolution of multi-phase modes for nonlinear dispersive waves, *Stud. Appl. Math.*, **49**, 225—238.

Абрахам-Шраунер (Abraham-Shrauner B.)

- [1970a] Suppression of runaway of electrons in a Lorentz plasma. I, Harmonically time varying electric field, *J. Plasma Phys.*, **4**, 387—402.
[1970b] Suppression of runaway of electrons in a Lorentz plasma. II, Crossed electric and magnetic fields, *J. Plasma Phys.*, **4**, 441—450.

Айнс (Ince E. L.)

- [1926] Ordinary Differential Equations, Longmans, Green, London. Русский перевод: Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, Научно-техническое изд-во Украины, 1939.

Авила, Келлер (Avila G.S.S., Keller J. B.)

- [1963] The high frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16**, 363—381.

Акерберг, О'Малли (Ackerberg R. C., O'Malley R. E., Jr.)

- [1970] Boundary layer problems exhibiting resonance, *Stud. Appl. Math.*, **49**, 277—295.

Акинсет, Ли (Akinsete V. A., Lee J. H. S.)

- [1969] Nonsimilar effects in the collapsing of an empty spherical cavity in water, *Phys. Fluids*, **12**, 428—434.

Алувалиа, Льюис, Боерсма (Ahluwalia D. S., Lewis R. M., Boersma J.)

- [1968] Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**, 783—807.

Альтшуль Л. М., Карлман В. И.

- [1965] К теории нелинейных колебаний в плазме без столкновений, *ЖЭТФ*, вып. 8, 515—525.

Альцхаймер, Дэвис (Alzheimer W. E., Davis R. T.)

- [1968] Unsymmetrical bending of prestressed annular plates, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, **4**, 905—917.

Амазиго, Будянски, Кэрриер (Amazigo J. C., Budiansky B., Carrier G. F.)

- [1970] Asymptotic analyses of the buckling of imperfect columns of nonlinear elastic foundations, *Int. J. Solids Structures*, **6**, 1341—1356.

Анрар (Henrard J.)

- [1970] On a perturbation theory using Lie transforms, *Celestial Mech.*, **3**, 107—120.

Арнольд В. И.

- [1963]* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, *Успехи матем. наук*, **18**, № 5 (113).

Асано (Asano N.)

- [1970] Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media. III, *J. Phys. Soc. Japan*, **29**, 220—224.

Асано, Таниути (Asano N., Taniuti T.)

- [1969] Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media, I, *J. Phys. Soc. Japan*, **27**, 1059—1063.

- [1970] Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media. II, *J. Phys. Soc. Japan*, **29**, 209—214.

Ашер (Usher P. D.)

- [1968] Coordinate stretching and interface location. II. A new PL expansion, *J. Computer Phys.*, **3**, 29—39.
 [1971] Necessary conditions for applicability of Poincaré-Lighthill perturbation theory, *Quart. Appl. Math.*, **28**, 463—471.

Бабич В. М.

- [1965] О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде, *ЖВМиМФ*, **5**, 949—951.

Бабич (Babich V. M.)

- [1970] *Mathematical Problems in Wave Propagation Theory*, Part I, Plenum, New York.
 [1971] *Mathematical Problems in Wave Propagation Theory*, Part II, Plenum, New York.

Бабич В. М., Кравцова Т. С.

- [1967] О распространении колебаний типа волновой пленки с квантованной толщиной, *ПММ*, **31**, 204—210.

Балеску (Balescu R.)

- [1963] *Statistical Mechanics of Charged Particles*, Wiley, New York. Русский перевод: Балеску Р., Статистическая механика заряженных частиц, М., «Мир», 1967.

Баракат, Хаустон (Barakat R., Houston A.)

- [1963] Nonlinear periodic capillary-gravity waves on a fluid of finite depth, *J. Geophys. Res.*, **73**, 6545—6554.

Баррар (Barrar R. B.)

- [1970] Convergence of the von Zeipel procedure, *Celestial Mech.*, **2**, 494—504.

Барсилон (Barcilon V.)

- [1970] Some inertial modifications of the linear viscous theory of steady rotating fluid flows, *Phys. Fluids*, **13**, 537—544.

Батлер, Гриббен (Butler D. S., Gribben R. J.)

- [1968] Relativistic formulation for nonlinear waves in a non-uniform plasma, *J. Plasma Phys.*, **2**, 257—281.

Бауер (Bauer H. F.)

- [1968] Nonlinear response of elastic plates to pulse excitations, *J. Appl. Mech.*, **35**, 47—52.

Беллман (Bellman R.)

- [1955] Research problems, *Bul. Am. Math. Soc.*, **61**, 192.
 [1964] *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering*, Holt, New York.

Бенни (Benney D. J.)

- [1965] The flow induced by a disk oscillating about a state of steady rotation, *Quart., Mech. Appl. Math.*, **18**, 333—345.
 [1966] Long waves on liquid films, *J. Math. and Phys.*, **45**, 150—155.
 [1967] The asymptotic behavior of nonlinear dispersive waves, *J. Math. and Phys.*, **46**, 115—132.

Бенни, Ньюэлл (Benney D. J., Newell A. C.)

- [1967] Sequential time closures for interacting random waves, *J. Math. and Phys.*, **46**, 363—393.

[1969] Random wave closures, *Stud. Appl. Math.*, **43**, 29—53.

Бенни, Роскес (Benney D. J., Roskes G. J.)

[1969] Wave instabilities, *Stud. Appl. Math.*, **48**, 377—385.

Бенни, Саффмэн (Benney D. J., Saffman P. G.)

[1966] Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A289**, 301—320.

Бернсайд (Burnside R. R.)

[1970] A note on Lighthill's method of strained coordinates, *SIAM, J. Appl. Math.*, **18**, 318—321.

Бишопп (Bisshopp F.)

[1969] A modified stationary principle for nonlinear waves, *J. Diff. Equations*, **5**, 592—605.

Блайстейн (Bleistein N.)

[1967] Uniform asymptotic expansions of integrals with many nearly stationary points and algebraic singularities, *J. Math. Mech.*, **17**, 533—559.

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.

[1969]* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев.

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.

[1974] Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука».

Блехман Н. И.

[1968]* Метод малого параметра. Сборник „Механика в СССР за 50 лет“, т. I, «Наука», М.

Болл (Ball R. H.)

[1964] Nonlinear theory of waves in a cold homogeneous plasma without magnetic field, Stanford Microwave Laboratory Rept. No. 1200.

Борн (Born M.)

[1926] Quantum mechanics of impact processes, *Z. Phys.*, **38**, 803—827.

Бохлин (Bohlin K. P.)

[1889] Über eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie, *Akad. Handl. Bihang.*, **14** (Afdl. Stockholm).

Браун (Brown W. P., Jr.)

[1966] Validity of the Rytov approximation in optical propagation calculations, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**, 1045—1052.

[1967] Validity of the Rytov approximation, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 1539—1543.

Брезертон (Bretherton F. P.)

[1962] Slow viscous motion round a cylinder in a simple shear, *J. Fluid Mech.*, **12**, 591—613.

[1964] Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations, *J. Fluid Mech.*, **20**, 457—479.

[1968] Propagation in slowly varying waveguides, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A302**, 555—576.

Брезертон, Гарретт (Bretherton F. P., Garrett C. J. R.)

[1968] Wavetrains in inhomogeneous moving media, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A302**, 529—554.

Брекуэлл, Перко (Breakwell J. V., Perko L. M.)

[1966] Matched asymptotic expansions, patched conics, and the computa-

tion of interplanetary trajectories. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, *Method in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, eds.), Academic, New York, pp. 159—182.

Брекуэлл, Прингл (Breakwell J. V., Pringle R., Jr.)

[1966] Resonances affecting motion near the earth-moon equilateral libration points. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 17, *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, eds.), Academic, New York, pp. 55—74.

Бриллюэн (Brillouin L.)

[1926] Remarques sur la mécanique ondulatoire, *J. Phys. Radium*, 7, 353—368.

Бро (Brau C. A.)

[1967] On the stochastic theory of dissociation and recombination of diatomic molecules in inert diluents, *J. Chem. Phys.*, 47, 1153—1163.

Бромберг (Bromberg E.)

[1956] Nonlinear bending of a circular plate under normal pressure, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, 633—659.

Брофман (Brofman W.)

[1967] Approximate analytical solution for satellite orbits subjected to small thrust or drag, *AIAA J.*, 5, 1121—1128.

Брулл, Соулер (Brull M. A., Soler A. I.)

[1966] A new perturbation technique for differential equations with small parameters, *Quart. Appl. Math.*, 24, 143—151.

Бурре (Bourret R. C.)

[1962a] Propagation of randomly perturbed fields, *Can. J. Phys.*, 40, 782—790.

[1962b] Stochastically perturbed fields, with applications to wave propagation in random media, *Nuovo Cimento*, 26, 1—31.

Буслаев Н. С.

[1964] Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на гладких выпуклых контурах, *Труды МИАН им. Стеклова*, т. 73.

Бутузов, Васильева А. Б., Федорюк М. В.

[1969]* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, *Итоги науки, Матем. анализ*, 1967, стр. 5—73.

Бэруа (Barua S. N.)

[1954] Secondary flow in a rotating straight pipe, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A227, 133—139.

Бюшал, Келлер (Buchal R. N., Keller J. B.)

[1960] Boundary layer problems in diffraction theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13, 85—144.

Вальс-Лорен (Vaglio-Laurin R.)

[1962] On the PLK method and the supersonic blunt-body problem, *J. Aeron. Sci.*, 29, 185—206.

Вазов (Wasow W. A.)

[1953] Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point, *Ann. Math.*, 58, 222—252.

[1955] On the convergence of an approximation method of M. J. Lighthill, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 751—767.

- [1965] Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Wiley, New York. Русский перевод: Вазов В. А., Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1968.
- [1968] Connection problems for asymptotic series, *Bull. Am. Math. Soc.*, **74**, 831—853.
- Вайнберг М. М., Треногин В. А.
- [1969]* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», М.
- Вайнштейн Л. А.
- [1966] Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., «Советское радио».
- Ван Вейнгаарден (Van Wijngaarden L.)
- [1968] On the oscillations near and at resonance in open pipes, *J. Eng. Math.*, **2**, 225—240.
- Ван Дайк (Van Dyke M. D.)
- [1952] A study of second-order supersonic flow theory, NACA Rept. No. 1081.
- [1964] Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic, New York. Русский перевод: Ван Дайк, Методы возмущений в механике жидкости, М., «Мир», 1967.
- Ван-дер-Корпут (Van der Corput J. G.)
- [1956] Asymptotic developments I. Fundamental theorems of asymptotics, *J. Anal. Math.*, **4**, 341—418.
- [1962] Asymptotic Expansions, Lecture notes, Stanford University.
- Ван-дер-Поль (Van der Pol B.)
- [1922] On a type of oscillation hysteresis in a simple triode generator, *Phil. Mag.*, **43**, 177—193.
- [1926] On oscillation hysteresis in a simple triode generator, *Phil. Mag.*, **43**, 700—719.
- [1927] Über Relaxations schwingungen, *Jahrb. Drahtl. Telegr Teleph*, **28**, 178—184.
- Ван Хов (Van Hove L.)
- [1955] Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation, *Physica*, **21**, 517—540.
- [1957] The approach to equilibrium in quantum statistics, *Physica*, **23**, 441—480.
- Ван Хов, Гугенхольц, Хаулэнд (Van Hove L., Hugenholtz N., Howland L.)
- [1961] Quantum Theory of Many Particle Systems, Benjamin, New York.
- Варватсис, Сансер (Varvatsis A. D., Sancer M. I.)
- [1971] On the renormalization method in random wave propagation, *Radio Sci.*, **6**, 87—97.
- Васильева А. Б.
- [1959] О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, *Матем. сборник*, **48**, 311—334.
- [1963a] Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, *УМН*, **18**, вып. 3, 15—86.
- [1963b]* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. *ЖВМ и МФ*, **3**, № 4, 611—643.

Ватсон (Watson G. N.)

- [1944] A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Macmillan, New York.
Русский перевод: Ватсон Дж. Н., Теория бесселевых функций, М., ИЛ, 1949.

Ватсон (Watson J.)

- [1960] On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 9, 371—389.

Вейль (Weyl H.)

- [1942] On the differential equations of the simplest boundary-layer problems, *Ann. Math.*, 43, 381—407.

Вентцель (Wentzel G.)

- [1926] Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingung für die Zwecke der Wellenmechanik, *Z. Phys.*, 38, 518—529.

Верхаген, Ван Вейнгаарден (Verhagen J. H. G., Van Wijngaarden L.)

- [1965] Non linear oscillations of fluid in a container, *J. Fluid Mech.*, 22, 737—751.

Вингейт, Дэвис (Wingate R. T., Davis R. T.)

- [1970] Perturbation solution of a hyperbolic equation governing longitudinal wave propagation in certain nonuniform bars, *J. Acoust. Soc. Am.*, 47, 1334—1337.

Витт А., Горелик Г.

- [1933] Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем, *Журнал технической физики*, III.

Вишик М. И., Люстерник Л. А.

- [1957] Регулярное вырождение и пограничный слой для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, 12, вып. 5, 3—122.

Волосов В. М.

- [1961]* О высших приближениях при усреднении, *ДАН СССР*, 137, № 5, 1022—1025.
[1962]* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, *УМН*, 13, вып. 6, 3—126.
[1963]* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 3, № 1, 3—53.
[1968]* Метод осреднения в теории нелинейных колебаний, „Механика в СССР за 50 лет“ т. 1, М., «Наука».

Волосов В. М., Моргунов Б. И.

- [1968]* Метод расчета стационарных резонансных колебательных и вращательных движений некоторых нелинейных систем. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 8, № 2, 251—294.

Волосов В. М., Моисеев Н. Н., Моргунов Б. И., Черноусько Ф. Л.

- [1965]* Асимптотические методы нелинейной механики, связанные с осреднением, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Обзорные доклады, вып. 2, М., «Наука», стр. 35—50.

Волосов В. М., Моргунов Б. И.

- [1971]* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., «Наука».

Вольф (Wolfe P.)

- [1967] A new approach to edge diffraction, *SIAM J. Appl. Math.*, 1, 15, 1434—1469.

Ву (Wu Y. T.)

- [1956] Two-dimensional sink flow of a viscous, heat-conducting, compressible fluid; cylindrical shock waves, *Quart. Appl. Math.*, 13, 393.

Галлоуэй, Крофорд (Galloway J. J., Crawford F. W.)

- [1970] Lagrangian derivation of wave-wave coupling coefficients, Proc. 4th-European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Rome (CHEN), 161.

Галлоуэй, Ким (Galloway J. J., Kim H.)

- [1971] Lagrangian approach to nonlinear wave interactions in a warm plasma, *J. Plasma Phys.*, 6, 53—72.

Гандерсен (Gundersen R. M.)

- [1967] Self-sustained thermally driven nonlinear oscillations in one-dimensional magnetohydrodynamic flow, *Int. J. Eng. Sci.*, 5, 205—211.

Ганс (Gans R.)

- [1915] Propagation of light through an inhomogeneous media, *Ann. Phys.*, 47, 709—736.

Гантмахер Ф. Р.

- [1966] Лекции по аналитической механике, М., «Наука».

Гарретт (Garrett C. J. R.)

- [1968] On the interaction between internal gravity waves and a shear flow, *J. Fluid Mech.*, 34, 711—720.

Гиро (Guiraud J. P.)

- [1965] Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation, *J. Mecanique*, 4, 215—267.

Глиден (Glyden H.)

- [1893] Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planets, *Acta Math.*, 9, 1—168.

Го (Kuo Y. H.)

- [1953] On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers, *J. Math. and Phys.*, 32, 83—101.

- [1956] Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds, *J. Aeron. Sci.*, 23, 125—136.

Голдберг, Сандри (Goldberg P., Sandri G.)

- [1967] Power series of kinetic theory. Parts I and II, *Phys. Rev.*, L154, 188—209.

Голдбург, Чен (Goldburg A., Cheng S. I.)

- [1961] The anomaly in the application of Poincare-Lighthill-Kuo and parabolic coordinates to the trailing edge boundary layer, *J. Math. Mech.*, 10, 529—535.

Голдстейн Г. (Goldstein H.)

- [1965] Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. Русский перевод: Голдстейн Г., Классическая механика, «Наука», М., 1975.

Голдстейн С. (Goldstein S.)

- [1929] The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A-123, 225—235.
- [1931] A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order, *Proc. London Math. Soc.*, 33, 246—252.
- [1969] Applications of singular perturbations and boundary-layer theory to simple ordinary differential equations. In *Contributions to Mechanics* (D. Abir, ed.), Pergamon, Oxford, pp. 41—67.

Гольштайн (Holstein V. H.)

- [1950] Über die aussere and innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen, *ZAMM*, 30, 25—49.

Горн (Horn J.)

- [1899] Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter, *Math. Ann.*, 52, 271—292.
- [1903] Untersuchung der Intergrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst successiver Annäherungen, *Arch. Math. Phys.*, 4, 213—230.

Гоулей (Golay M. J. E.)

- [1964] Normalized equations of the regenerative oscillator-noise, phase-locking, and pulling, *Proc. IEEE*, 52, 1311—1330.

Гретлер (Gretler W.)

- [1968] Eine indirekte Methode zur Berechnung der ebenen Unterschallströmung, *J. Mecanique*, 7, 83—96.

Гримшоу (Grimshaw R.)

- [1966] High-frequency scattering by finite convex regions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 19, 167—198.
- [1970] The solitary wave in water of variable depth, *J. Fluid Mech*, 42, 639—656.

Грин (Green G.)

- [1837] On the motion of waves in a variable canal of small depth and width, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 6, 457—462.

Грин, Уивер (Green G. S., Weaver A. K.)

- [1961] The estimation of the three-dimensional gyrations of a ballistic missile descending through the atmosphere, *Royal Aircraft Establishment Tech. Note G. W.*, 596 (London).

Гудрич, Казариннов (Goodrich R. F., Kazarinoff N. D.)

- [1963] Diffraction by thin elliptic cylinders, *Michigan Math. J.*, 10, 105—127.

Дайсон (Dyson F. J.)

- [1949] The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Phys. Rev.*, 75, 486—502.

Дас (Das K. P.)

- [1971] Interaction among three extraordinary waves in a hot electron plasma, *Phys. Fluids*, 14, 124—128.

Де Барбьерн, Мароли (De Barbieri O., Maroli C.)

- [1967] On the dynamics of weakly ionized gases, *Ann. Phys.*, 42, 315—333.

Де Брейн (De Bruijn N. G.)

- [1958] *Asymptotic Methods in Analysis*, North-Holland, Amsterdam, Interscience, New York. Русский перевод: Брейн Г., де, Асимптотические методы в анализе, М., ИЛ, 1961.

Де Вольф (De Wolf D. A.)

- [1965] Wave propagation through quasi-optical irregularities, *J. Opt. Soc. Am.*, 55, 812—817.
[1967] Validity of Rytov's approximation, *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 1057—1058.

Дейвидсон (Davidson R. C.)

- [1967] The evolution of wave correlations in uniformly turbulent weakly nonlinear systems, *J. Plasma Phys.*, 1, 341—359.
[1968] Nonlinear oscillations in a Vlasov-Maxwell plasma, *Phys. Fluids*, 11, 194—204.
[1969] General weak turbulence theory of resonant fourwave processes, *Phys. Fluids*, 12, 149—161.

Девисон (Davison L.)

- [1968] Perturbation theory of nonlinear elastic wave propagation, *Int. J. Solids Structures*, 4, 301—322.

Депри (Deprit A.)

- [1969] Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mech.* 1, 12—30.

Депри, Депри-Бартоломе (Deprit A., Deprit-Bartholomé A.)

- [1967] Stability of the triangular Lagrangian points, *Astron. J.*, 72, No. 2.

Джасмен (Jahsman W. E.)

- [1968] Collapse of a gas-filled spherical cavity, *J. Appl. Mech.*, 35, 579—587.

Джакалья (Giacaglia G.E.O.)

- [1964] Notes on von Zeipel's method, NASA X—547—64—161.

Джейкоб (Jakob M.)

- [1949] *Heat Transfer*, vol. 1, Wiley, New York.

Джейкобс (Jacobs S. J.)

- [1967] An asymptotic solution of the tidal equations, *J. Fluid Mech.*, 30, 417—438.

Джеффрис (Jeffreys H.)

- [1924a] On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order, *Proc. London Math. Soc.*, 23, 428—436.
[1924b] On certain solutions of Mathieu's equation, *Proc. London Math. Soc.*, 23, 437—476.
[1962] *Asymptotic Approximations*, Oxford University Press, Oxford,

Ди Прима (Di Prima R. C.)

- [1969] Higher order approximations in the asymptotic solution of the Reynolds equation for slider bearings at high bearing numbers, *J. Lubrication Technology*, 91, 45—51.

Дирак (Dirac P. A. M.)

- [1926] On the theory of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc.*, A112, 661—677.

Добровольный, Роджистер (Dobrowolny M., Rogister A.)

- [1971] Nonlinear theory of hydromagnetic waves in a high β plasma, *J. Plasma Phys.*, 6, 401—412.

Доерти (Dougherty J. P.)

- [1970] Lagrangian methods in plasma dynamics. I. General theory of the method of the averaged Lagrangian, *J. Plasma Phys.*, **4**, 761—785.

Дородницын А. А.

- [1947] Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля, *ПММ*, XI.
 [1952]* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. *УМН*, т. VII, вып. 6.

Дрейзин (Drazin P. G.)

- [1969] Nonlinear internal gravity waves in a slightly stratified atmosphere, *J. Fluid Mech.*, **36**, 433—446.

Дьюар (Dewar R. L.)

- [1970] Interaction between hydromagnetic waves and a time-dependent, inhomogeneous medium, *Phys. Fluids*, **13**, 2710—2720.

Дэвис, Олфренд (Davis R. T., Alfrend K. T.)

- [1967] Solutions to van der Pol's equation using a perturbation method, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **2**, 153—162.

Евграфов М. А., Федорюк М. В.

- [1966] Асимптотика решений уравнений $\omega''(z) - p(z, \lambda) = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости z , *УМН*, XXI, вып. 1, 3—50.

Евтушенко Ю. Г., Черноушко Ф. Л.

- [1964]* Asymptotic Methods for the solution of Some Problems of Satellite Dynamics. Proceedings of the XV-th International Astronautical Congress, Warszawa, v. I, p. 277—296.

Жермен (Germain P.)

- [1967] Recent evolution in problems and methods in aerodynamics, *J. Roy. Aeron. Soc.*, **71**, 673—691.

Забрейко П. П., Ледовская И. Б.

- [1966] О старших приближениях метода усреднения Боголюбова—Крылова, *ДАН СССР*, **171** № 2, 262—265.

Завадский, Левак (Zawadzski E. M., Lewak G. J.)

- [1971] Penetration to second order of an electrostatic field into a warm plasma, *J. Plasma Phys.*, **5**, 73—87.

Заудерер (Zauderer E.)

- [1964a] Wave propagation around a convex cylinder, *J. Math. Mech.*, **13**, 171—186.
 [1964b] Wave propagation around a smooth object, *J. Math. Mech.*, **13**, 187—199.
 [1970a] Boundary layer and uniform asymptotic expansions for diffraction problems, *SIAM J. Appl. Math.*, **19**, 575—600.
 [1970b] Uniform asymptotic solutions of the reduced wave equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **30**, 157—171.

Иванилов Ю. П.

- [1961]* Катящиеся волны в наклонном канале, *ЖВМ и МФ*, **1**, № 6, 1061—1076.

Имаи (Imai I.)

- [1948] On a refinement of the W. K. B. method, *Phys. Rev.*, **74**, 113.
 [1950] Asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, *Phys. Rev.*, **80**, 1112.

- Йохансен, Кейн (Johansen K. F., Kane T. R.)
[1969] A simple description of the motion of a spherical pendulum, *J. Appl. Mech.*, **36**, 408—411.
- Каваками (Kawakami I.)
[1970] Perturbation approach to nonlinear Vlasov equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **28**, 505—514.
- Каваками, Ягисита (Kawakami I., Yagishita T.)
[1971] Perturbation approach to nonlinear Vlasov equation, II, Nonlinear plasma oscillation of finite amplitude, *J. Phys. Soc. Japan*, **30**, 244—253.
- Казаринов (Kazarinoff N. D.)
[1958] Asymptotic theory of second order differential equations with two simple turning points, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2**, 129—150.
- Казаринов, Маккелви (Kazarinoff N. D., McKelvey R. W.)
[1956] Asymptotic solution of differential equations in a domain containing a regular singular point, *Can. J. Math.*, **8**, 97—104.
- Калдиrola, Де Барбьери, Мароли (Caldirola P., De Barbieri O., Maroli C.)
[1966] Electromagnetic wave propagation in a weakly ionized plasma. I, *Nuovo Cimento*, **B42**, 266—289.
- Камсток (Comstock C.)
[1968] On Lighthill's method of strained coordinates, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**, 596—602.
[1971] Singular perturbations of elliptic equations, *1*, *SIAM J. Appl. Math.*, **20**, 491—502.
- Каплун (Kaplun S.)
[1954] The role of coordinate systems in boundary-layer theory, *Z. Angew. Math. Phys.*, **5**, 111—135; также Chapter 1 of Kaplun (1967).
[1957] Low Reynolds number flow past a circular cylinder, *J. Math. Mech.*, **6**, 595—603; также Chapter 3 of Kaplun [1967].
[1967] Fluid Mechanics and Singular Perturbations (a collection of papers by S. Kaplun, edited by P. A. Lagerstrom, L. N. Howard, and C. S. Liu), Academic, New York.
- Каплун, Ларестром (Kaplun S., Lagerstrom P. A.)
[1957] Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers, *J. Math. Mech.*, **6**, 585—593; также Chapter 2 of Kaplun [1967].
- Карал, Келлер (Karal F. C., Keller J. B.)
[1964] Elastic, electromagnetic, and other waves in a random medium, *J. Math. Phys.*, **5**, 537—547.
- Карлини (Carlini F.)
[1817] Recherche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero. Memoria di Francesco Carlini, Milano; также Jacobi's Ges Werke, **7**, 189—245; также *Astron. Nachrichten*, **30**, 197—254.
- Карпман В. И., Крушкаль Е. М.
[1968] О модулированных волнах и нелинейных диспергирующих средах, *ЖЭТФ*, **55**, № 2.
- Кеворкян (Kevorkian J.)
[1966a] The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations, *Space Mathematics*. Part.

3 (J. B. Rosser, Ed.) American Mathematical Society, Providence, R. I., p. 206—275.

[1966b] Von Ziepel method and the two-variable expansion procedure, *Astron. J.*, **71**, 878—885.

[1971] Passage through resonance for a one-dimensional oscillator with slowly varying frequency, *SIAM J. Appl. Math.*, **20**, 364—373.

Кейн, Кан (Kane T. R., Kahn M. E.)

[1968] On a class of two-degree-of-freedom oscillations, *J. Appl. Mech.*, **35**, 547—552.

Келлер (Keller J. B.)

[1958] A geometrical theory of diffraction, calculus of variations and its applications, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **8**, 27—52.

[1962] Wave propagation in random media, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **13**, 227—246.

[1968] Perturbation Theory. Lecture notes, Mathematics Department, Michigan State University.

Келлер, Когельман (Keller J. B., Kogelman S.)

[1970] Asymptotic solutions of initial value problems for nonlinear partial differential equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **18**, 748—758.

Келлер, Миллман (Keller J. B., Millman M. H.)

[1969] Perturbation theory of nonlinear electromagnetic wave propagation, *Phys. Rev.*, **181**, 1730—1747.

Келлер, Тин (Keller J. B., Ting L.)

[1966] Periodic vibrations of systems governed by nonlinear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19**, 371—420.

Келли (Kelly R. E.)

[1965] Stability of a panel in incompressible, unsteady flow, *AIAA J.*, **3**, 1113—1118.

[1967] On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time, *J. Fluid Mech.*, **27**, 657—689.

Кембл (Kemble E. C.)

[1935] A contribution to the theory of the B. W. K. method, *Phys. Rev.*, **48**, 549—561.

Кемел (Kamel A. A.)

[1969a] Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mech.*, **1**, 190—199.

[1969b] Perturbation theory based on Lie transforms and its application to the stability of motion near sun-perturbed earth-moon triangular libration points, SUDAAR Rept. No. 391, Stanford University.

[1970] Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations, *Celestial Mech.*, **3**, 90—106.

[1971] Lie transforms and the Hamiltonization of non-Hamiltonian systems, *Celestial Mech.*, **4**, 397—405.

Керстейн (Kerstein P. H. M.)

[1967] Diffraction of an electromagnetic wave by a plane screen, Ph. D. Thesis, Technische Hochschule, Eindhoven.

Киан (Kiang R. L.)

[1969] Nonlinear theory of inviscid Taylor instability near the cutoff wave number, *Phys. Fluids*, **12**, 1333—1339.

Кирхгоф (Kirchhoff G.)

[1877] Zur Theorie des Condensators, Berlin, Akad., Monatsber, p. 144—162.

Кларк (Clark R. A.)

[1958] Asymptotic solutions of toroidal shell problems, *Quart. Appl. Math.*, **16**, 47—60.

[1963] Asymptotic solutions of a nonhomogeneous differential equation with a turning point, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **12**, 34—51.

[1964] Asymptotic solutions of elastic shell problems, in *Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications* (C. H. Wilcox, ed.), Wiley, New York, pp. 185—209.

Клима, Рамнат, Сандри (Klimas A., Ramnath R. V., Sandri G.)

[1970] On the compatibility problem for the uniformization of asymptotic expansions, *J. Math. Anal. Appl.*, **32**, 482—504.

Клэр (Clare T. A.)

[1971] Resonance instability for finned configurations having nonlinear aerodynamic properties, *J. Spacecraft Rockets*, **8**, 278—283.

Коддингтон, Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)

[1955] *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York. Русский перевод: Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.

Кои, Пейн (Caughey T. K., Payne H. J.)

[1967] On the response of a class of self-excited oscillators to stochastic excitation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **2**, 125 | 51.

Кокран (Cochran J. A.)

[1962] Problems in singular perturbation theory, Ph. D. Thesis, Stanford University.

Контопулос (Contopoulos G.)

[1963] On the existence of a third integral of motion, *Astron J.*, **68**, 1—14.

Коукли (Coakley T. J.)

[1968] Dynamic stability of symmetric spinning missiles, *J. Spacecraft Rockets*, **5**, 1231—1232.

Коул (Cole J. D.)

[1968] *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass. Русский перевод: Коул Дж., Методы возмущений в прикладной математике, М., «Мир», 1972.

Коул, Кеворкян (Cole J. D., Kevorkian J.)

[1963] Uniformly valid asymptotic approximations for certain nonlinear differential equations, *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics* (J. P. LaSalle and S. Lefschetz, eds.), Academic, New York, p. 113—120.

Коффи (Coffey T. P., Jr.)

[1969] Invariants to all orders in classical perturbation theory, *J. Math. Phys.*, **10**, 426—438.

Кравцов Ю. А.

[1964а] Об одной модификации метода геометрической оптики, *Известия вузов. Радиофизика*, **7**, № 4, 664—673.

- [19646] Асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустики, *Известия вузов. Радиофизика*, 7, № 6, 1049—1056.
- [1965] Модификация метода геометрической оптики для волны, просачивающейся через каустику, *Известия вузов. Радиофизика*, 8, № 4, 659—667.
- Крайхнан (Kraichnan R. H.)
- [1961] Dynamics of nonlinear stochastic systems, *J. Math. Phys.*, 2, 124—148.
- Краммерс (Kramers H. A.)
- [1926] Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung, *Z. Phys.*, 39, 828—840.
- Краппер (Crapper G. D.)
- [1980] Nonlinear capillary waves generated by steep gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 40, 149—159.
- Крейн (Crane L. J.)
- [1959] A note on Stewartson's paper on asymptotic expansions in the theory of boundary layers, *J. Math. and Phys.*, 38, 172—174.
- Крускал (Kruskal M.)
- [1962] Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic, *J. Math. Phys.*, 3, 806—828.
- Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.
- [1937] Введение в нелинейную механику, Киев, Изд-во АН УССР.
- Кубо (Kubo R.)
- [1963] Stochastic Liouville equation, *J. Math. Phys.*, 4, 174—183.
- Кузмач Г. Е.
- [1959] Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, *ИММ*, XXIII, вып. 3, 515—526.
- Куйкен (Kuiken H. K.)
- [1970] Inviscid film flow over an inclined surface originated by strong fluid injection, *J. Fluid Mech.*, 42, 337—347.
- Кэмпбелл, Джеффрис (Campbell J. A., Jefferys W. H.)
- [1970] Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit, *Celestial Mech.*, 2, 467—473.
- Кэрриер (Carrier G. F.)
- [1953] Boundary layer problems in applied mechanics, *Advan. Appl. Mech.*, 3, 1—19.
- [1954] Boundary layer problems in applied mathematics, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 11—17.
- [1966] Gravity waves on water of variable depth, *J. Fluid Mech.*, 24, 641—659.
- [1970] Singular perturbation theory and geophysics, *SIAM Rev.*, 12, 175—193.
- Кэшвелл (Cashwell F. D.)
- [1951] The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular, *Pacific J. Math.*, 1, 337—353.

Ларгерстром, Коул (Lagerstrom P. A., Cole J. D.)

- [1955] Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, **4**, 817—882.

Ларгерстром, Кеворкян (Lagerstrom P. A., Kevorkian J.)

- [1963a] Earth-to-moon trajectories in the restricted three-body problem, *J. Mecanique*, **2**, 189—218.
[1963b] Matched-conic approximation to the two fixed force-center problem, *Astron. J.*, **68**, 84—92.

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

- [1949a] A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, *Phil. Mag.*, **40**, 1179—1201.
[1949b] The shock strength in supersonic „conical fields“, *Phil. Mag.*, **40**, 1202—1223.
[1951] A new approach to thin airfoil theory, *Aeron. Quart.*, **3**, 193—210.
[1961] A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, *Z. Flugwiss.*, **9**, 267—275.
[1965] Contributions to the theory of waves in non-linear dispersive systems, *J. Inst. Math. Appl.*, **1**, 269—306.
[1967] Some special cases treated by the Whitham theory, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A299**, 28—53.

Лангер (Langer R. E.)

- [1931] On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order, *Trans. Am. Math. Soc.*, **33**, 23—64.
[1934] The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order, *Trans. Am. Math. Soc.*, **36**, 90—106.
[1935] On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with reference to the Stokes phenomenon about a singular point, *Trans. Am. Math. Soc.*, **37**, 397—416.
[1949] The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point, *Trans. Am. Math. Soc.*, **67**, 461—490.
[1957] On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics, *Trans. Am. Math. Soc.*, **84**, 144—191.
[1959a] Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type, *Trans. Am. Math. Soc.*, **92**, 371—410.
[1959b] The asymptotic solutions of a linear differential equation of the second order with two turning points, *Trans. Am. Math. Soc.*, **90**, 113—142

Лаплас (Laplace P. S.)

- [1805] On the figure of a large drop of mercury, and the depression of mercury in a glass tube of a great diameter, In *Celestial Mechanics* (transl. by Nathaniel Bowditch, Boston, 1839), Chelsea, New York, 1966.

Латта (Latta G. E.)

- [1951] Singular perturbation problems, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology.
[1964] Advanced Ordinary Differential Equations, Lecture notes, Stanford University,

Лацина (Lacina J.)

- [1969a] New canonical perturbation method for complete set of integrals of motion, *Czech. J. Phys.*, **B19**, 130—133.

- [1969b] New canonical perturbation method for complete set of integrals of motion, *Ann. Phys.*, **51**, 381—391.

Левак (Lewak G. J.)

- [1969] More uniform perturbation theory of the Vlasov equation, *J. Plasma Phys.*, **3**, 243—253.
 [1971] Interaction of electrostatic waves in collisionless plasmas, *J. Plasma Phys.*, **5**, 51—63.

Леверье (Le Verrier U.J.J.)

- [1856] Sur la détermination des longitudes terrestres, *Paris, Compt. Rend.*, **43**, 249—257.

Леви (Levey H. C.)

- [1959] The thickness of cylindrical shocks and the PLK method., *Quart. Appl. Math.*, **17**, 77—93.

Леви, Фельзен (Levey L., Felsen L. B.)

- [1967] On transition functions occurring in the theory of diffraction in inhomogeneous media, *J. Inst. Mat. Appl.*, **3**, 76—97.

Левинсон (Levinson N.)

- [1969] Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations, *Stud. Appl. Math.*, **48**, 285—297.

Легра (Legras J.)

- [1951] Application de la méthode de Lighthill à un écoulement plan supersonique, *Compt. Rend.*, **233**, 1005—1008.
 [1953] Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'étude des ondes de choc. O.N.E.R.A. Publ. No. 66.

Леонтович

- [1962]* Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел, *ДАН СССР*, **142**, № 3.

Лессер (Lesser M. B.)

- [1970] Uniformly valid perturbation series for wave propagation in an inhomogeneous medium, *J. Acoust. Soc. Am.*, **47**, 1297—1302.

Ли, Шеппард (Lee D. H., Sheppard L. M.)

- [1966] An approximate second-order wing theory, *AIAA J.*, **4**, 1828—1830.

Лик (Lick W.)

- [1969] Two-variable expansions and singular perturbation problems, *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 815—825.
 [1970] Nonlinear wave propagation in fluids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 2 (M. van Dyke, W. G. Vincinti, and J. V. Wehausen, eds.), Annual Reviews, Palo Alto, Calif., p. 113—136.

Линдзен (Lindzen R. S.)

- [1971] Equatorial planetary waves in shear: Part I, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 609—622.

Линдштедт (Lindstedt A.)

- [1882] Ueber die Integration einer für die störungstheorie wichtigen Differentialgleichung, *Astron. Nach.*, **103**, Col. 211—220.

Линн, Келлер (Lynn R.Y.S., Keller J. B.)

- [1970] Uniform asymptotic solutions of second order linear ordinary differential equations with turning points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23**, 379—408.

Линь (Lin C. C.)

- [1954] On a perturbation theory based on the method of characteristics, *J. Math. and Phys.*, **33**, 117—134.
[1955] The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge. Русский перевод: Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.

Линь, Рабенштайн (Lin C. C., Rabenstein A. L.)

- [1960] On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, *Trans. Am. Math. Soc.*, **94**, 24—57.
[1969] On the asymptotic theory of a class of ordinary differential equations of the fourth order. II, Existence of solutions which are approximated by the formal solutions, *Stud. Appl. Math.*, **48**, 311—340.

Лиувилль (Liouville J.)

- [1837] Second memoire sur le développement des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *J. Math. Pure Appl.*, **2**, 16—35.

Лоуэлл (Lowell S. C.)

- [1970] Wave propagation in monatomic lattices with anharmonic potential, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A318**, 93—106.

Льюис, Блайстайн, Людвиг (Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D.)

- [1967] Uniform asymptotic theory of creeping waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, 295—328.

Людвиг (Ludwig D.)

- [1966] Uniform asymptotic expansions at a caustic, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19**, 215—250.
[1967] Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, 103—138.
[1970a] Diffraction by a circular cavity, *J. Math. Phys.*, **11**, 1617—1630.
[1970b] Uniform asymptotic expansions for wave propagation and diffraction problems, *SIAM Rev.*, **12**, 325—331.

Люк (Luke J. C.)

- [1966] A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A292**, 403—412.

Мак Голдрик (Mc Goldrick L. F.)

- [1970] On Wilton's ripples: A special case of resonant interactions, *J. Fluid Mech.*, **42**, 193—200.

Мак-Интайр (McIntyre J. E.)

- [1966] Neighboring optimal terminal control with discontinuous forcing functions, *AIAA J.*, **4**, 141—148.

Маккелви (Mc Kelvey R. W.)

- [1955] The solution of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two, *Trans. Am. Math. Soc.*, **79**, 103—123.

Макнамара, Уайтмен (McNamara B., Whiteman K. J.)

- [1967] Invariants of nearly periodic Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.*, **8**, 2029—2038.

Максвелл (Maxwell J. C.)

- [1866] On the viscosity or internal friction of air and other gases, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **156**, 249—268.

Малкин И. Г.

- [1964]* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М.
[1966]* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М.

Малкус, Веронис (Malkus W. V. R., Veronis G.)

- [1958] Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.*, **4**, 225—260.

Малхолланд (Mulholland R. J.)

- [1971] Nonlinear oscillations of a third-order differential equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **6**, 279—294.

Маркеев А. П.

- [1969]* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел, *ПММ*, **33**, № 1.

Мароли (Maroli C.)

- [1966] Kinetic theory of high-frequency resonance gas discharge breakdown, *Nuovo Cimento*, **B41**, 208—224.

Мароли, Поццоли (Maroli C., Pozzoli R.)

- [1969] Penetration of high-frequency electromagnetic waves into a slightly ionized plasma, *Nuovo Cimento*, **B61**, 277—289.

Матковский (Matkowsky B. J.)

- [1966] Asymptotic solution of partial differential equations in thin domains, Ph. D. Thesis, New York University.

Махони (Mahony J. J.)

- [1962] An expansion method for singular perturbation problems, *J. Australian Mat. Soc.*, **2**, 440—463.

Мейер (Meyer J. W.)

- [1971] Rayleigh scattering of a laser beam from a massive relativistic two-level atom, *Phys. Rev.*, **A3**, 1431—1443.

Мейрович (Meirovitch L.)

- [1970] *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, New York.

Мельник (Melnik R. E.)

- [1965] Newtonian entropy layer in the vicinity of a conical symmetry plane, *AIAA J.*, **3**, 520—522.

Мендельсон (Mendelson K. S.)

- [1970] Perturbation theory for damped nonlinear oscillations, *J. Math. Phys.*, **11**, 3413—3415.

Меррей (Murray J. D.)

- [1968] On the effect of drainage on free surface oscillations, *Appl. Sci. Res.*, **19**, 234—249.

Мерсман (Mersman W. A.)

- [1970] A new algorithm for the Lie transformation, *Celestial Mech.*, **3**, 81—89.
[1971] Explicit recursive algorithms for the construction of equivalent canonical transformations, *Celestial Mech.*, **3**, 384—389.

- Мерфи (Murphy C. H.)
[1963] Free flight motion of symmetric missiles, Ballistic Research Laboratories Rept. No. 1216, Aberdeen Proving Grounds, Md.
- Меттлер (Mettler E.)
[1959] Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischen Systeme, *Ingenieur-Archiv.*, 28, 213—228.
- Миллер, Гуд (Miller S. C., Good R. H.)
[1953] A WKB-type approximation to the Schrödinger equation, *Phys. Rev.*, 91, 174—179.
- Миллман, Келлер (Millman M. H., Keller J. B.)
[1969] Perturbation theory of nonlinear boundary-value problems, *J. Math. Phys.*, 10, 342—361.
- Митропольский Ю. А.
[1964] Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., «Наука».
- Митчелл (Mitchell C. E.)
[1971] Analysis of a combustion instability problem using the technique of multiple scales, *AIAA J.*, 9, 532—533.
- Мищенко Е. Ф.
[1957]* Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Известия АН СССР, серия «Математика», 21, № 5, 627—654.
- Моисеев Н. Н.
[1969]* Асимптотические методы нелинейной механики, М., «Наука».
[1970]* Некоторые вопросы гидродинамики поверхностных волн. Механика в СССР за 50 лет, том 2. Механика жидкости и газа, «Наука», М., стр. 55—78.
- Монтгомери, Тидман (Montgomery D., Tidman D. A.)
[1964] Secular and nonsecular behavior for the cold plasma equations, *Phys. Fluids*, 7, 242—249.
- Моригути (Moriguchi H.)
[1959] An improvement of the WKB method in the presence of turning points and the asymptotic solutions of a class of Hill equations, *J. Phys. Soc. Japan*, 14, 1771—1796.
- Морино (Morino L.)
[1969] A perturbation method for treating nonlinear panel flutter problems, *AIAA J.*, 7, 405—411.
- Моррис (Morris W. D.)
[1965] Laminar convection in a heated vertical tube rotating about a parallel axis, *J. Fluid Mech.*, 21, 453—464.
- Моррисон (Morrison J. A.)
[1966a] Comparison of the modified method of averaging and the two variable expansion procedure, *SIAM Rev.*, 8, 66—85.
[1966b] Generalized method of averaging and the von Zeipel method. In Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol 17, Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics (R. L. Duncombe and V. G. Szebely, eds.), Academic, New York, 117—138.

Мортелл (Mortell M. P.)

[1968] Traveling load on a cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, 1664—1670.

[1969] Waves on a spherical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, **45**, 144—149.

[1971] Resonant thermal-acoustic oscillations, *Int. J. Eng. Sci.*, **9**, 175—192.

Мортелл, Варлей (Mortell M. P., Varley E.)

[1971] Finite amplitude waves in bounded media: Nonlinear free vibrations of an elastic panel, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A318**, 169—196.

Мортон (Morton B. R.)

[1959] Laminar convection in uniformly heated horizontal pipes at low Rayleigh numbers, *Quart. J. Mech. Appl. Mat.*, **12**, 410—426.

Мьюза (Musa S. A.)

[1967] Integral constraints in weakly nonlinear periodic systems, *SIAM J. Appl. Math.*, **15**, 1324—1327.

Мьюзен (Musen P.)

[1965] On the high order effects in the methods of Krylov-Bogoliubov and Poincaré, *J. Astron. Sci.*, **12**, 129—134.

Мэслоу, Келли (Maslowe S. A., Kelly R. E.)

[1970] Finite amplitude oscillations in a Kelvin-Helmholtz flow, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **5**, 427—435.

Найфэ А., Неммат-Нассеп (Nayfeh Adnan, Nemmat-Nasser S.)

[1971] Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation, *Acta Mechanica*, **12**, 53—69.

Найфэ (Nayfeh A. H.)

[1964] A generalized method for treating singular perturbation problems, Ph. D. Thesis, Stanford University.

[1965a] A comparison of three perturbation methods for the earth-moon-spacecraft problem, *AIAA J.*, **3**, 1682—1687.

[1965b] An expansion method for treating singular perturbation problems, *J. Math. Phys.*, **6**, 1946—1951.

[1965c] A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems, *J. Math. and Phys.*, **44**, 368—374.

[1965d] Nonlinear oscillations in a hot electron plasma, *Phys. Fluids*, **8**, 1896—1898.

[1966] Take-off from a circular orbit by a small thrust. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, eds.), Academic, New York, p. 139—157.

[1967a] Asymptotic solutions of an eigenvalue problem with two turning points—heat transfer in a tube, *J. Math. and Phys.*, **46**, 349—354.

[1967b] The van der Pol oscillator with delayed amplitude limiting, *Proc. IEEE*, **55**, 111—112.

[1968] Forced oscillations of the van der Pol oscillator with delayed amplitude limiting, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **15**, 192—200.

[1969a] A multiple time scaling analysis of re-entry vehicle roll dynamics, *AIAA J.*, **7**, 2155—2157.

[1969b] On the nonlinear Lamb-Taylor instability, *J. Fluid Mech.*, **38**, 619—631.

[1970a] Characteristic exponents for the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies, *AIAA J.*, **8**, 1916—1917.

[1970b] Finite amplitude surface waves in a liquid layer, *J. Fluid Mech.*, **70**, 671—684.

- [1970c] Nonlinear stability of a liquid jet, *Phys. Fluids*, **13**, 841—847.
- [1970d] Triple- and quintuple-dimpled wave profiles in deep water, *Phys. Fluids*, **13**, 545—550.
- [1971a] Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **48**, 385—395.
- [1971b] Two-to-one resonances near the equilateral libration points, *AIAA J.*, **9**, 23—27.
- Найфэ, Хассан (Nayfeh A. H., Hassan S. D.)
- [1971] The method of multiple scales and nonlinear dispersive waves, *J. Fluid Mech.*, **48**, 463—475.
- Найфэ, Кемел (Nayfeh A. H., Kamel A. A.)
- [1970a] Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies, *AIAA J.*, **8**, 221—223.
- [1970b] Three-to-one resonances near the equilateral libration points, *AIAA J.*, **8**, 2245—2251.
- Найфэ, Сарик (Nayfeh A. H., Saric W. S.)
- [1971a] Nonlinear Kelvin—Helmholtz instability, *J. Fluid Mech.*, **46**, 206—231.
- [1971b] Nonlinear resonances in the motion of rolling re-entry bodies, *AIAA Paper No. 71—74*.
- [1972a] An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics, *AIAA J.*, **10**, 1004—1011.
- [1972b] Nonlinear waves in a Kelvin—Helmholtz flow, *J. Fluid Mech.*, **55**, 311—327.
- Нейр, Неммат-Нассер (Nair S., Nemmat-Nasser S.)
- [1971] On finite amplitude waves in heterogeneous elastic solids, *Int. J. Eng. Sci.*, **9**, 1087—1105.
- Нинхус (Nienhuis G.)
- [1970] On the microscopic theory of Brownian motion with a rotational degree of freedom, *Physica*, **49**, 26—48.
- Ноердлингер, Петросян (Noerdlinger P. D., Petrosian V.)
- [1971] The effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles, *Astrophys. J.*, **168**, 1—9.
- Нойберт (Neubert J. A.)
- [1970] Asymptotic solution of the stochastic Helmholtz equation for turbulent water, *J. Acoust. Soc. Am.*, **48**, 1203—1211.
- Ньюэлл (Newell A. C.)
- [1968] The closure problem in a system of random gravity waves, *Rev. Geophys.*, **6**, 1—31.
- [1969] Rossby wave packet interactions, *J. Fluid Mech.*, **35**, 255—271.
- Ньюэлл, Уайтхед (Newell A. C., Whitehead J. A.)
- [1969] Finite bandwidth, finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, **38**, 279—303.
- Озеен (Oseen C. W.)
- [1910] Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, **6**, No. 29.
- Окендон (Ockendon J. R.)
- [1966] The separation of Newtonian shock layers, *J. Fluid Mech.*, **26**, 563—572.

Олбрайт (Albright N. W.)

- [1970] Quasilinear stabilization of the transverse instability, *Phys. Fluids*, **13**, 1021—1030.

Олвер (Olver F. W. J.)

- [1954] The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel functions of large order, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **247**, 307—327.
[1959] Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders, *J. Res. Natl. Bur. Standards*, **63B**, 131—169.

Олфренд (Alfriend K. T.)

- [1970] The stability of the triangular Lagrangian points for commensurability of order two, *Celestial Mech.*, **1**, 351—359.
[1971a] Stability and motion in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems for two-to-one commensurability, *Celestial Mech.*, **3**, 247—265.
[1971b] Stability and motion about L_4 at three-to-one commensurability, *Celestial Mech.*, **4**, 60—77.

Олфренд, Рэнд (Alfriend K. T., Rand R. H.)

- [1969] Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies, *AIAA J.*, **7**, 1024—1028.

О'Малли (O'Malley R. E., Jr.)

- [1968a] A boundary value problem for certain nonlinear second order differential equations with a small parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **29**, 66—74.
[1968b] Topics in singular perturbations, *Advan. Math.*, **2**, 365—470.
[1971] Boundary layer methods for nonlinear initial value problems, *SIAM Rev.*, **13**, 425—434.

Осватич (Oswatitsch V. K.)

- [1965] Ausbreitungsprobleme, *ZAMM*, **45**, 485—498.

Пайк (Pike E. R.)

- [1964] On the related-equation method of asymptotic approximation, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **17**, 369—379.

Паркер (Parker D. F.)

- [1969] Nonlinearity, relaxation and diffusion in acoustics and ultrasonics, *J. Fluid Mech.*, **39**, 793—815.

Паркер, Варлей (Parker D. F., Varley E.)

- [1968] The interaction of finite amplitude deflection and stretching waves in elastic membranes and strings, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **21**, 329—352.

Педлоски (Pedlosky J.)

- [1967] Fluctuating winds and the ocean circulation, *Tellus* **19**, 250—257.

Пейре (Peyret R.)

- [1966] Ecoulement quasi unidimensionnel dans un accélérateur de plasma à ondes progressives, *J. Mecanique*, **5**, 471—515.
[1970] Etude de l'écoulement d'un fluide conducteur dans un canal par la méthode des échelles multiples, *J. Mecanique*, **9**, 61—97.

Перко (Perko L. M.)

- [1969] Higher order averaging and related methods for perturbed periodic and quasi-periodic systems, *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 698—724.

- Пирсон, Файф (Pierson W. J., Fife P.)
[1961] Some non-linear properties of long-crested periodic waves with lengths near 2, 44 centimeters, *J. Geophys. Res.*, **66**, 163—179.
- Понтрягин Л. С.
[1957*] Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. *Известия АН СССР, серия Математика*, 21, № 5, 605—626.
- Прасад (Prasad R.)
[1971] Effect of ion motion on parametric oscillations of a cold plasma in a magnetic field, *J. Plasma Phys.*, **5**, 291—302.
- Прандтль (Prandtl L.)
[1905] Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proceedings Third Internat. Math. Kongr., Heidelberg, pp. 484—491. Motion of fluids with very little viscosity. Tech. Memo N. A. C. A. (English transl.), No. 452, 1928.
- Праудмен (Proudman I.)
[1960] An example of steady laminar flow at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **9**, 593—602.
- Праудмен, Пирсон (Proudman I., Pearson J. R. A.)
[1957] Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **2**, 237—262. Русский перевод см. сб. *Механика* 2 (48) (1958).
- Пригожин (Prigogine I.)
[1962] Nonequilibrium Statistical Mechanics, Wiley, New York.
- Примас (Primas H.)
[1961] Über quantenmechanische Systeme mit einem stochastischen Hamilton-operator, *Helv. Phys. Acta*, **34**, 36—57.
- Притуло (Pritulo M. F.)
[1961] On the determination of uniformly accurate solutions of differential equations by the method of perturbation of coordinates, *J. Appl. Math. Mech.*, **26**, 661—667.
- Пуанкаре (Poincaré H.)
[1892] New Methods of Celestial Mechanics, Vol. I—III (English transl.), NASA TTF—450, 1967. Русский перевод: Пуанкаре А., Новый метод небесной механики, Избранные труды, М., «Наука», 1971—1974.
- Пэнди (Pandey B. C.)
[1968] Study of cylindrical piston problem in water using PLK method, *ZAMP*, **19**, 962—963.
- Пюри (Puri K. K.)
[1971] Effect of viscosity and membrane on the oscillations of superposed fluids, *J. Appl. Phys.*, **42**, 995—1000.
- Рабберт, Ландау (Rubbert P. E., Landahl M. T.)
[1967] Solution of the transonic airfoil problem through parametric differentiation, *AIAA, J.*, **5**, 470—479.
- Рабенштейн (Rabenstein A. L.)
[1959] The determination of the inverse matrix for a basic reference equation for the theory of hydrodynamic stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2**, 355—366.

Радзяппа (Rajappa N. R.)

- [1970] Nonlinear theory of Taylor instability of superposed fluids, *J. Phys. Soc. Japan*, **28**, 219—224.

Ральф (Rulf B.)

- [1967] Relation between creeping waves and lateral waves on a curved interface, *J. Math. Phys.*, **8**, 1785—1793.
[1968] Uniform asymptotic theory of diffraction at an interface, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**, 67—76.

Раманатан, Сандри (Ramanathan G. V., Sandri G.)

- [1969] Model for the derivation of kinetic theory, *J. Math. Phys.*, **10**, 1763—1773.

Рамнат (Ramnath R. V.)

- [1970a] A new analytical approximation for the Thomas-Fermi model in atomic physics, *J. Math. Anal. Appl.*, **31**, 285—296.
[1970b] Transition dynamics of VTOL aircraft, *AIAA J.*, **8**, 1214—1221.
[1971] On a class of nonlinear differential equations of astrophysics, *J. Math. Anal. Appl.*, **35**, 27—47.

Рамнат, Сандри (Ramnath R. V., Sandri G.)

- [1969] A generalized multiple scales approach to a class of linear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **28**, 339—364.

Рао (Rao P. S.)

- [1956] Supersonic bangs, *Aeron. Quart.*, **7**, 135—155.

Раппопорт И. М.

- [1954]* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, Киев.

Рарити (Rarity B. S. H.)

- [1969] A theory of the propagation of internal gravity waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, **39**, 497—509.

Расмуссен (Rasmussen M. L.)

- [1970] Uniformly valid approximation for nonlinear oscillations with small damping, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **5**, 687—696.

Рейнольдс, Поттер (Reynolds W. C., Potter M. C.)

- [1967] Finite-amplitude instability of parallel shear flows, *J. Fluid Mech.*, **27**, 465—492.

Рейсс (Reiss E. L.)

- [1971] On multivariable asymptotic expansions, *SIAM Rev.*, **13**, 189—196.

Рейсс, Матковский (Reiss E. L., Matkowsky B. J.)

- [1971] Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column, *Quart. Appl. Math.*, **29**, 245—260.

Рейсснер, Вайничке (Reissner E., Weinitschke H. J.)

- [1963] Finite pure bending of circular cylindrical tubes, *Quart. Appl. Math.*, **20**, 305—319.

Рем (Rehm R. G.)

- [1968] Radiative energy addition behind a shock wave, *Phys. Fluids*, **11**, 1872—1883.

Ричмонд, Моррисон (Richmond O., Morrison H. L.)

- [1968] Application of a perturbation technique based on the method of characteristics to axisymmetric plasticity, *J. Appl. Mech.*, **35**, 117—122.

Роджистер (Register A.)

- [1971] Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high- β plasma, *Phys. Fluids*, **14**, 2733—2739.

Росс (Ross L. W.)

- [1970] Perturbation analysis of diffusion-coupled biochemical reaction kinetics, *SIAM J. Appl. Math.*, **19**, 323—329.

Рытов С. М.

- [1937] Дифракция света на ультразвуковых волнах, *Известия АН СССР, серия «Физика»*, № 2, 223—259.

Рэлей (Rayleigh L.)

- [1912] On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A86**, 208—226.
[1917] On the reflection of light from a regularly stratified medium, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A93**, 565—577.

Рэнд, Дзен (Rand R. H., Tseng S. F.)

- [1969] On the stability of a differential equation with application on the vibrations of a particle in the plane, *J. Appl. Mech.*, **36**, 311—313.

Сакураи (Sakurai A.)

- [1965] Blast wave theory. In *Basic Developments in Fluid Dynamics*, Vol. I (M. Holt, Ed.), Academic, New York, pp. 309—375.
[1968] Effect of the plasma impedance on the time variation of the inverse pinch, *J. Phys. Soc. Japan*, **25**, 1671—1679.

Салпетер, Бете (Salpeter E. E., Bethe H. A.)

- [1951] A relativistic equation for bound-state problems, *Phys. Rev.*, **84**, 1232—1242.

Сандерс, Липинс (Sanders J. L., Jr., Liepins A. A.)

- [1963] Toroidal membrane under internal pressure, *AIAA J.*, **1**, 2105—2110.

Сандри (Sandri G.)

- [1965] A new method of expansion in mathematical physics, *Nuovo Cimento*, **B36**, 67—93.
[1967] Uniformization of asymptotic expansions. In *Nonlinear Partial Differential Equations: A Symposium on Methods of Solutions* (W. F. Ames, Ed.), Academic, New York, pp. 259—277.

Сансер, Варватсис (Sancer M. I., Varvatsis A. D.)

- [1969] An investigation of the renormalization and Rytov methods as applied to propagation in a turbulent medium. Northrop Corporate Laboratories, Rept. No. 69—28R.
[1970] A comparison of the Born and Rytov methods, *Proc. IEEE*, **58**, 140—141

Свансон (Swanson C. A.)

- [1956] Differential equations with singular points. Tech. Rept. 16, Contract Nonr. 220(11), Department of Mathematics, California Institute of Technology.

Свит (Sweet J.)

- [1971] Impulse of a ring with nonlinear material behavior, *AIAA J.*, 9, 332—334.

Селлерс, Трибус, Клейн (Sellers J. R., Tribus M., Klein J. S.)

- [1956] Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit—The Graetz problem extended, *Trans. ASME*, 78, 441—448.

Сетна (Sethna P. R.)

- [1963] Transients in certain autonomous multiple-degree-of-freedom nonlinear vibrating systems, *J. Appl. Mech.*, 30, 44—50.
 [1965] Vibrations of dynamical systems with quadratic nonlinearities, *J. Appl. Mech.*, 32, 576—582.

Сёрл (Searl J. W.)

- [1971] Expansions for singular perturbations, *J. Inst. Math. Appl.*, 8, 131—138.

Сибуя (Sibuya Y.)

- [1958] Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre, *J. Fac. Science, Univ. Tokyo*, 7, 527—540.
 [1963a] Asymptotic solutions of a linear ordinary differential equation of n th order about a simple turning point. In International Symposium Differential Equations and Nonlinear Mechanics (J. P. La Salle and S. Lefschetz, eds.) Academic New York, 485—488.
 [1963b] Simplification of a linear ordinary differential equation of the n th order at a turning point, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 13, 206—221.
 [1967] Subdominant solutions of the differential equation $y y'' - \lambda^2 (x - a_1) \times \dots (x - a_n) \neq 0$. *Acta Math.*, 119, 235—271.

Симмонс (Simmons W. F.)

- [1969] A variational method for weak resonant wave interactions, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A309, 551—575.

Сиринаньо, Крокко (Sirignano W. A., Crocco L.)

- [1964] A shock wave model of unstable rocket combustors, *AIAA J.*, 2, 1285—1296.

Скотт (Scott A. C.)

- [1970] Propagation of magnetic flux on a long Josephson tunnel junction, *Nuovo Cimento*, B69, 241—261.

Скотт (Scott P. R.)

- [1966] Equations of the oscillator with delayed amplitude limiting, *Proc. IEEE*, 54, 898—899.

Сприггс, Месситер, Андерсон (Spriggs J. H., Messiter A. F., Anderson W. J.)

- [1969] Membrane flutter paradox—An explanation by singular-perturbation methods, *AIAA J.*, 7, 1704—1709.

Старрок (Sturrock P. A.)

- [1957] Nonlinear effects in electron plasmas, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A242, 277—299.
 [1958] A variational principle and an energy theorem for small amplitude disturbances of electron beams and of electron-ion plasmas, *Ann. Phys.*, 4, 306—324.
 [1962] Plasma Hydromagnetic, Stanford University Press, Stanford, California.

- [1963] Nonlinear theory of electromagnetic waves in plasmas. Stanford University Microwave Laboratory Rept. No. 1004.

Стерн (Stern D. P.)

- [1970a] Direct canonical transformations, *J. Math. Phys.*, **11**, 2776—2781.
 [1970b] Kruskal's perturbation method, *J. Math. Phys.*, **11**, 2771—2775.
 [1971a] A new formulation of canonical perturbation theory, *Celestial Mech.*, **3**, 241—246.
 [1971b] Classical adiabatic theory, *J. Math. Phys.*, **12**, 2231—2242.
 [1971c] The canonization of nice variables, *J. Math. Phys.*, **12**, 2226—2231.

Стил (Steele C. R.)

- [1965] On the asymptotic solution of nonhomogeneous ordinary differential equations with a large parameter, *Quart. Appl. Math.*, **23**, 193—201.

Стокс (Stokes G. G.)

- [1851] On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**, 8—106.
 [1857] On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments, *Cambridge Phil. Trans.*, **10**, 106—128; *Coll. Papers*, **4**, 77—109.

Стокер (Stoker J. J.)

- [1957] *Water Waves*, Wiley, New York. Русский перевод: Стокер Дж. Дж., *Волны на воде*, М., ИЛ, 1959.

Стоун (Stone P. H.)

- [1969] The meridional structure of baroclinic waves, *J. Atmos. Sci.*, **26**, 376—389.

Страбл (Struble R. A.)

- [1962] *Nonlinear Differential Equations*, McGraw-Hill, New York.

Стробен (Strohbehn J. W.)

- [1968] Comments on Rytov's method, *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 139—140.

Стьюарт (Stuart J. T.)

- [1958] On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, **4**, 1—21.
 [1960a] Nonlinear effects in hydrodynamic stability, *Proc. Xth Int. Cong. Appl. Mech.*, Stresa, Italy.
 [1960b] On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part. I. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **9**, 353—370.
 [1961] On three-dimensional nonlinear effects in the stability of parallel flows, *Advan. Aeron. Sci.*, **3**, 121—142. Pergamon, Oxford.

Стьюартсон, Стьюарт (Stewartson K., Stuart J. T.)

- [1971] A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **48**, 529—545.

Сэведж, Хасегава (Savage J. C., Hasegawa H. S.)

- [1967] Evidence for a linear attenuation mechanism, *Geophysics*, **32**, 1003—1014.

Там (Tam C. K. W.)

- [1969] Amplitude dispersion and nonlinear instability of whistlers, *Phys. Fluids*, **12**, 1028—1035.
 [1970] Nonlinear dispersion of cold plasma waves, *J. Plasma Phys.*, **4**, 109—125.

Там (Tam K. K.)

- [1968] On the asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation by the method of multiple scales, *J. Fluid Mech.*, **34**, 145—158.

Тамаркин Я. Д.

- [1917]* О некоторых общих вопросах теории дифференциальных уравнений и о разложении функций в ряды, Петроград.

Тан, Сивасубраманиан (Tang T. W., Sivasubramanian A.)

- [1971] Nonlinear instability of modulated waves in a magnetoplasma, *Phys. Fluids*, **14**, 444—446.

Татарский В. И.

- [1959] Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд. АН СССР.

- [1964] Распространение электромагнитных волн в среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, *ЖЭТФ*, т. 46, вып. 4, 13—99.

Татарский В. И., Герценштейн М. Е.

- [1963] Распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления, *ЖЭТФ*, т. 44, вып. 2, 676.

Тауссиг (Taussig R. T.)

- [1969] Macroscopic quasilinear theory of high-frequency radiation in a cold plasma, *Phys. Fluids*, **12**, 914—922.

Тейлор (Taylor L. S.)

- [1967] On Rytov's method, *Radio Sci.*, **2**, 437—441.

Темпл (Temple G.)

- [1958] Linearization and delinearization, Proc. Intern. Cong. Math. Edinburgh, p. 233—247.

Террил, Шрестха (Terrill R. M., Shrestha G. M.)

- [1965] Laminar flow through a channel with uniformly porous walls of different permeability, *Appl. Sci. Res.*, **A15**, 440—468.

Тимошенко, Войновский-Кригер (Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.)

- [1959] Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York. Русский перевод: Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластинки и оболочки, М., «Наука», 1966.

Тин, Брофман (Ting L., Brofman S.)

- [1964] On take-off from circular orbit by small thrust, *ZAMM*, **44**, 417—428.

Тихонов А. Н.

- [1948]* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 22.

- [1950]* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. *Математический сборник*, 27.

- [1952]* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. *Математический сборник*, 31.

Толлмин (Tollmien W.)

- [1947] Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen, *ZAMM*, **25/27**, 34—50, 70—83.

- Томе (Thome J.)
[1883] Über Integrale zweiter Gattung, *J. Reine Angew. Math.*, **95**, 241—250.
- Треногин В. А.
[1970]* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника — Вишика, *УМН*, **25**, вып. 4(154), 123—156.
- Тумаркин С. А.
[1959] Асимптотическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переходной точкой и его приложения к расчетам торообразных оболочек и лопастей, *ПММ*, т. XXIII, вып. 6, 1083.
- Уайтхед (Whitehead A. N.)
[1889] Second approximations to viscous fluid motion, *Quart. J. Math.*, **23**, 143—152.
- Уилкоккс (Wilcox C. H.)
[1964] Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications, Wiley, New York.
[1966] Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics, Wiley, New York.
- Уиттекер (Whittaker E. T.)
[1914] On the general solution of Mathieu's equation, *Edinburgh Math. Soc. Proc.*, **32**, 75—80.
[1916] On the adelpic integral on the differential equations of dynamics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **37**, 95—116.
[1937] Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed., Cambridge University Press. Cambridge. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937.
- Уизем (Whitham G. B.)
[1952] The flow pattern of a supersonic projectile, *Comm. Pure Appl. Math.*, **5**, 301—348.
[1953] The propagation of weak spherical shocks in stars, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6**, 397—414.
[1965a] A general approach to linear and nonlinear waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, **22**, 273—283.
[1965b] Nonlinear dispersive waves, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A283**, 238—261.
[1967a] Nonlinear dispersion of water waves, *J. Fluid. Mech.*, **27**, 399—412.
[1967b] Variational methods and applications to water waves, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A299**, 6—25.
[1970] Two-timing, variational principles and waves, *J. Fluid Mech.*, **44**, 373—395.
- Фаа де Бруно (Faa De Bruno F.)
[1857] Note sur une nouvelle formule de calcul differentiel, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **1**, 359—360.
- Фаукес (Fowkes N. D.)
[1968] A singular perturbation method. Parts I and II, *Quart. Appl. Math.*, **26**, 57—69, 71—85.
- Фаулер, Лок (Fowler R. H., Lock C. N. H.)
[1921] Approximate solutions of linear differential equations, *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 127—147.
- Фаулер, Галлоп, Лок, Ричмонд (Fowler R. H., Gallop E. G., Lock C. N. H., Richmond H. W.)

- [1920] The aerodynamics of a spinning shell, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **221**, 295—387.
- Фейнман (Feynman R. P.)
- [1948] Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, *Rev. Modern Phys.*, **20**, 367—387.
- Фещенко С. Ф., Шкилев Н. И., Николенко Л. Д.
- [1966] Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, Киев, «Наукова думка».
- Фок В. А.
- [1970] Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн М., «Советское радио»,
- Фокс (Fох P. A.)
- [1953] On the use of coordinate perturbations in the solution of physical problems, Project DIC 6915 Technical Rept. No. 1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
- [1955] Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics, *J. Math. and Phys.*, **34**, 133—151.
- Фон Цайпель (Von Zeipel H.)
- [1916] Movements of minor planets, *Ark. Mat, Astron. Fysik, Stockholm*, **II**, No. 1, 1—58, No. 7, 1—62
- Фосс (Voss W.)
- [1933] Bedingungen Für das Auftreten des Ramsauereffektes, *Z. Phys.*, **83**, 581—618.
- Френкель (Fraenkel L. E.)
- [1969] On the method of matched asymptotic expansions, Parts I—III, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **65**, 209—231, 233—251, 263—284.
- Фрид (Fried D. L.)
- [1967] Test of the Rytov approximation, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 268—269.
- Фридрихс (Friedrichs K. O.)
- [1942] Theory of viscous fluids, Fluid Dynamics, Brown University Press, Providence, R. I., Chapter 4.
- [1955] Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **61**, 484—504.
- Фримен (Frieman E. A.)
- [1963] On a new method in the theory of irreversible processes, *J. Math. Phys.*, **4**, 410—418.
- Фримен, Разерфорд (Frieman E. A., Rutherford P.)
- [1964] Kinetic theory of a weakly unstable plasma, *Ann. Phys*, **28**, 134—177.
- Фримен, Джонсон (Freeman N. C., Johnson R. S.)
- [1970] Shallow water waves on shear flows, *J. Fluid Mech.*, **42**, 401—409.
- Фриш (Frisch U.)
- [1965] Wave propagation in Random Media, Institut d'Astrophysique, Paris.
- [1968] Wave propagation in random media, Probability Methods in Applied Mathematics, Vol. 1 (A. T. Bharucha-Reid, ed.), Academic, New York, pp. 75—198.
- Фробениус (Frobenius G.)
- [1875] Ueber die regularen Integrale der linearen Differentialgleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **80**, 317—333.

Фуруцу (Furutsu K.)

- [1963] On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium, *J. Res. Natl. Bur. Standards, Sec. D*, **67**, 303—323.

Хайдбредер (Heidbreder G. R.)

- [1967] Multiple scattering and the method of Rytov, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 1477—1479.

Хан (Han L. S.)

- [1965] On the free vibration of a beam on a nonlinear elastic foundation, *J. Appl. Mech.*, **32**, 445—447.

Ханкс (Hanks T. C.)

- [1971] Model relating heat-flow value near, and vertical velocities of mass transport beneath, ocean rises, *J. Geophys. Res.*, **76**, 537—544.

Хай (Howe M. S.)

- [1967] Nonlinear theory of open-channel steady flow past a solid surface of finite-wave-group shape, *J. Fluid Mech.*, **30**, 497—512.

Хафнагель, Стэнли (Hufnagel R. E., Stanley N. R.)

- [1964] Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 52—61.

Хзи, Сибуя (Hsieh P. F., Sibuya Y.)

- [1966] On the asymptotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, **16**, 84—103.

Хиршфельдер (Hirschfelder F. O.)

- [1969] Formal Reyleigh—Schrödinger perturbation theory for both degenerate and non-degenerate energy states, *Int. J. Quantum Chem.*, **3**, 731—748.

Хольт (Holt M.)

- [1967] The collapse of an imploding spherical cavity, *Rev. Roumaine, Sci. Tech. Ser. Mec. Appl.*, **12**, 407—415.

Хольт, Шварц (Holt M., Schwartz N. J.)

- [1963] Cavitation bubble collapse in water with finite density behind the interface, *Phys. Fluids*, **6**, 521—525.

Хори (Hori G. I.)

- [1966] Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 287—296.

- [1967] Nonlinear coupling of two harmonic oscillations, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **19**, 229—241.

- [1970] Comparison of two perturbation theories based on canonical transformations, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **22**, 191—198.

Хоулт (Hoult D. P.)

- [1968] Euler—Lagrange relationship for random dispersive waves, *Phys. Fluids*, **11**, 2082—2086.

Хугстратен (Hoogstraten H. W.)

- [1967] Uniformly valid approximations in two-dimensional subsonic thin airfoil theory, *J. Eng. Math.*, **1**, 51—65.

- [1968] Dispersion of nonlinear shallow water waves, *J. Eng. Math.*, **2**, 249—273.

Цваан (Zwaan A.)

- [1929] Intensiteiten im Ca—Funkenspektrum, Ph. D. Thesis, Utrecht.

Цванциг (Zwanzig R.)

- [1964] On the intensity of three generalized master equations, *Physica*, **30**, 1109—1123.

Циреп, Гейнатц (Zierep V. J., Heynatz J. T.)

- [1965] Ein analytisches Verfahren zur Berechnung der nichtlinearen Wellenausbreitung, *ZAMM*, **45**, 37—46.

Цо, Кои (Tso W. K., Caughey T. K.)

- [1965] Parametric excitation of a nonlinear system, *J. Appl. Mech.*, **32**, 899—902.

Цянь Сюэ-сень (Tsien H. S.)

- [1956] The Poincaré—Lighthill—Kuo method, *Advan. Appl. Mech.*, **4**, 281—349.

Чан, Акинс, Банков (Chang K. S., Akins R. G., Bankoff S. G.)

- [1966] Free convection of a liquid metal from a uniformly heated vertical plate, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **5**, 26—37.

Чезари (Cesari L.)

- [1971] Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York. Русский перевод: Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1964.

Чен, Ву (Cheng H., Wu T. T.)

- [1970] An aging spring, *Stud. Appl. Math.*, **49**, 183—185.

Чен, Кирш, Ли (Cheng H. K., Kirsch J. W., Lee R. S.)

- [1971] On the reattachment of a shock layer produced by an instantaneous energy release, *J. Fluid Mech.*, **48**, 241—263.

Чень (Chen C. S.)

- [1971] Parametric excitation in an inhomogeneous plasma, *J. Plasma Phys.*, **5**, 107—113.

Чень, Левак (Chen C. S., Lewak G. J.)

- [1970] Parametric excitation of a plasma, *J. Plasma Phys.*, **4**, 357—369.

Чернов (Chernov L. A.)

- [1960] Wave Propagation in a Random Medium, Dover, New York.

Черноусько Ф. Л.

- [1961]* Отражение сходящихся слабых ударных волн в газе переменной плотности, *ПММ*, **XXV**, вып. 2, 209—217.

- [1963]* Study of Satellite Motion about Center of Mass Using Averaging Method. Proceedings of the XIY-th International Astronautical Congress, Paris, v. IV, p. 143—154.

- [1963b]* О резонанс в существенно нелинейной системе. *Журнал вычислит. математики и математической физики*, т. 3, № 1, стр. 131—144.

Черри (Cherry T. M.)

- [1927] On the transformation of Hamiltonian systems of linear differential equations with constant or periodic coefficients, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **26**, 211—230.

- [1949] Uniform asymptotic expansions, *J. London Math. Soc.*, **24**, 121—130.

- [1950] Uniform asymptotic formulae for functions with transition points, *Trans. Am. Math. Soc.*, **68**, 224—257.

Чон, Сирович (Chong T. H., Sirovich L.)

- [1971] Non-linear effects in steady supersonic dissipative gas dynamics. Part I—Two-dimensional flow, *J. Fluid Mech.*, **50**, 161—176.

Чу (Chu B. T.)

- [1963] Analysis of a self-sustained thermally driven nonlinear vibration, *Phys. Fluids*, **6**, 1638—1644.

Чу, Ёин (Chu B. T., Ying S. J.)

- [1963] Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with travelling shock waves, *Phys. Fluid.*, **6**, 1625—1637.

Чу, Мей (Chu V. H., Mei C. C.)

- [1970] On slowly-varying Stokes waves, *J. Fluid Mech.*, **41**, 873—887.

Чудов Л. А.

- [1963] О некоторых недостатках классической теории пограничного слоя, Сб. «Численные методы в газовой динамике», вып. 2, М., Изд-во МГУ, 98—109.

Шаббар (Shabbar M.)

- [1971] Side-band resonance mechanism in the atmosphere supporting Rossby waves, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 345—349.

Швертассек (Schwertassek V. R.)

- [1969] Grenzen von Mitnahmebereichen, *ZAMM*, **49**, 409—421.

Шень (Shen C. N.)

- [1959] Stability of forced oscillations with nonlinear second-order terms, *J. Appl. Mech.*, **26**, 499—502.

Шехтер (Schechter H. B.)

- [1968] The effect of three-dimensional nonlinear resonances on the motion of a particle near the earth-moon equilateral libration points, Second Compilation of Papers on Trajectory Analysis and Guidance Theory, NASA PM-67-21, 229—344.

Ши, Экштейн (Shi Y. Y., Eckstein M. C.)

- [1966] Ascent or descent from satellite orbit by low thrust, *AIAA J.*, **4**, 2203—2209.

- [1968] Application of singular perturbation methods to resonance problems, *Astron J.*, **73**, 275—289.

Шкарофский (Shkarofsky I. P.)

- [1971] Modified Born back scattering from turbulent plasmas: Attenuation leading to saturation and cross-polarization, *Radio Sci.*, **6**, 819—831.

Шнайад (Shniad H.)

- [1970] The equivalence of von Zeipel mappings and Lie transforms, *Celestial Mech.*, **2**, 114—120.

Шредингер (Schrödinger E.)

- [1926] Quantisierung als Eigenwertproblem, *Ann. Phys.*, **80**, 437—490.

Эвенсен (Evensen D. A.)

- [1968] Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions, *AIAA J.*, **6**, 370—372.

Эйлер (Euler L.)

- [1754] Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae, **5**, 205—237; *Opera Omnia*, Ser. I, **14**, 585—617.

- Эйнауди (Einaudi F.)
 [1969] Singular perturbation analysis of acoustic-gravity waves, *Phys. Fluids*, **12**, 752—756.
 [1970] Shock formation in acoustic gravity waves, *J. Geophys. Res.*, **75**, 193.
- Экштейн, Ши (Eckstein M. C., Shi Y. Y.)
 [1967] Low-thrust elliptic spiral trajectories of a satellite of variable mass, *AIAA J.*, **5**, 1491—1494.
- Экштейн, Ши, Кеворкян (Eckstein M. C., Shi Y. Y., Kevorkian J.)
 [1966a] A uniformly valid asymptotic representation of satellite motion around the smaller primary in the restricted three-body problem. In *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, Interchange Progress in Astro and Aero with Methods... Mechanics R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, eds. Academic, New York, p. 183—198.
 [1966b] Satellite motion for arbitrary eccentricity and inclination around the smaller primary in the restricted three-body problem, *Astron. J.*, **71**, 248—263.
 [1966c] Use of the energy integral to evaluate higher-order terms in the time history of satellite motion, *Astron. J.*, **71**, 301—305.
- Экхаус (Eckhaus W.)
 [1965] *Studies in Nonlinear Stability Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Эмануэль (Emanuel G.)
 [1966] Unsteady, diffusing, reacting tubular flow with application to the flow in a glow discharge tube, Aerospace Corporation Rept. No. TR-669 (6240-20)-9.
- Эмери (Emery V. J.)
 [1970] Eikonal approximation for nonlinear equations, *J. Math. Phys.*, **11**, 1893—1900.
- Эрдейи (Erdelyi A.)
 [1956] *Asymptotic Expansions*, Dover, New York. Русский перевод: Эрдейи А., Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
 [1960] Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities, *J. Math. Phys.*, **1**, 16—26.
 [1961] An expansion procedure for singular perturbations, *Atti. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **95**, 651—672.
- Эрнст, Примас (Ernst R. R., Primas H.)
 [1963] Nuclear magnetic resonance with stochastic high-frequency fields, *Helv. Phys. Acta*, **36**, 583—600.
- Эспедаль (Espedal M. S.)
 [1971] The effects of ion—ion collision on a ion-acoustic plasma pulse, *J. Plasma Phys.*, **5**, 343—355.
- Эшли (Ashley H.)
 [1967] Multiple scaling in flight vehicle dynamic analysis—a preliminary look, AIAA Paper No. 67—560.
- Юень (Yuen M. C.)
 [1968] Nonlinear capillary instability of a liquid jet, *J. Fluid Mech.*, **33**, 151—163.
- Якоби (Jacobi G. G. J.)
 [1849] Versuch einer Berechnung der grossen Ungleichheit des Saturns nach einer strengen Entwicklung, *Astron. Nachr.*, **28**, 65—94.